Eine Liste von rekonstruierten Theorien

Abkürzungen und Hilfsdefinitionen

- $\wedge$ ist eine Abkürzungen für 'und'
- $\vee$ ist eine Abkürzungen für 'oder'
- $\neg$ ist eine Abkürzungen für 'nicht'
- $\rightarrow$ ist eine Abkürzungen für 'wenn, dann'
- $x, y, z, x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ..., a, b, c, e$ und X, Y sind Variable für Mengen
- $\in$ ist eine Abkürzung für Elementschaft (für Mengen)
- $\wp$ ist eine Abkürzung für 'Potenzmenge'
- $\times$ ist eine Abkürzung für 'das kartesische Produkt'
  $X \times Y$ drückt aus, dass $X \times Y$ das kartesische Produkt von Mengen X und Y ist
- $\mathcal{FUN}$ ist ein Funktionssymbol
- $f \in \mathcal{FUN}(X : Y)$ bedeutet, dass f eine Funktion ist, die von X zu Y führt
- $\{...\}$ stellt eine Menge von Elementen dar,
  die Elemente sind durch '...' nicht explizit gemacht
- $\forall$ ist eine Abkürzung für 'alle'
- $\exists$ ist eine Abkürzung für 'es gibt'
- $\mathrm{I\!R}$ ist eine Abkürzung für die Menge der reellen Zahlen
- $\exists! x$... besagt, dass es genau ein x gibt, so dass ...

Mathematische Theorien

TA1 Theorie der Klassifizierung, KLA

Grundmenge:

– O (Menge von Objekten)

Relation:

– K (Klasseneinteilung)

Typifizierung:

Θ: $K \in \wp(\wp(O))$

Hypothesen:

H_1 $\forall k \in K(k \subseteq O)$
H_2 $\forall k \in K \forall k' \in K(k \cap k' = \emptyset)$
H_3 $\cup_{k \in K}\ k = O$

Modelle:

x ist eine Klassifizierung gdw es Mengen O und K gibt, so dass gilt:

$$x = \langle O, K \rangle$$

und die Relation K den Typ Θ hat
und die Hypothesen $H_1(O, K)$ und ... und $H_3(O, K)$ in x gelten.
$\mathbf{M}(\mathbf{KLA})$ ist die Menge der Klassifizierungen
$\mathbf{M}(\mathbf{KLA}, O) = \{x / \exists K(x = \langle O, K \rangle \wedge x \in \mathbf{M}(\mathbf{KLA})\}$, die Menge der Klassifizierung über O

I(KLA) die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Klassifizierung der Lebewesen in der Zoologie
– Klassifizierung von Wörtern in natürlichen Sprachen

TA2 Theorie der Verbände, VER

Grundmenge:

– O (Menge von Objekten)

Relationen:

– $\cap$ (Durchschnitt)
– $\cup$ (Vereinigung)

Konstanten:

– 0 (Nullelement)
– 1 (Einselement)

Typisierungen:

Θ_1: $\cap \in \mathcal{FUN}(O \times O : O)$
Θ_2: $\cup \in \mathcal{FUN}(O \times O : O)$
Θ_3: $0 \in O$
Θ_4: $1 \in O$

Hypothesen:

Für alle $a, b, c \in O$ gilt:
H_1 $a \cap b = b \cap a$
H_2 $a \cup b = b \cup a$
H_3 $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$
H_4 $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$
H_5 $a \cap (a \cup b) = a$
H_6 $a \cup (a \cap b) = a$
H_7 $a \cap 0 = 0 \wedge a \cup 0 = a$
H_8 $a \cap 1 = a \wedge a \cup 1 = 1$
H_9 $\exists a^c \in O(a \cap a^c = 0 \wedge a \cup a^c = 1)$
H_{10} $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
H_{11} $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

Modelle:

x ist ein komplementärer, distributiver Verband mit Null und Eins gdw es 0,1 und Mengen $O, \cap, \cup$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle O, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$$

und die Relationen und Konstanten haben die Typen Θ_1, ..., Θ_4
und die Hypothesen $H_1(O, \cap, \cup, 0, 1)$ und ... und $H_{11}(O, \cap, \cup, 0, 1)$ gelten in x.

Ein *allgemeiner* Verband erfüllt nur $H_1 - H_6$,
ein Verband mit Null und Eins erfüllt $H_1 - H_8$,
ein komplementärer Verband erfüllt $H_1 - H_9$,
ein Bool'scher Verband erfüllt $H_1 - H_{11}$.

I(VER) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:

– Systeme von Ausdrücken in natürlichen Sprachen
– Systeme von mathematischen Objekten

TA3 Theorie der natürlichen Zahlen, ART

Grundmenge:

– N (Menge von natürlichen Zahlen)

Funktion:

– f (Nachfolgefunktion)

Typisierung:

Θ: $f \in \mathcal{FUN}(N : N)$

Konstante:

– 0 (die Zahl Null)

Definition:

$f(X) = \{f(x)/x \in X\}$ ist das Bild von f der Menge X

Hypothesen:

H_1 f ist injektiv
H_2 $0 \in N$
H_3 $0 \notin f(N) \wedge$
$\forall X(X \subseteq N \wedge 0 \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow f(x) \in X) \rightarrow N \subseteq X)$

Modelle:

x ist ein Modell der natürlichen Zahlen gdw es 0 und Mengen N und f gibt, so dass gilt:

$$x = \langle N, 0, f \rangle$$

und die Relation f hat den Typ Θ
und die Hypothesen $H_1(N, 0, f)$ und ... und $H_3(N, 0, f)$ gelten in x.

I(ART) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiel:
– *die* Menge der natürlichen Zahlen

TA4 Theorie der Körper, KOP

Grundmenge:

– K (Menge von Zahlen)

Relation:

– $<$ („kleiner als“ für Zahlen)

Funktionen:

– $+$ (Additionsfunktion)
– $\cdot$ (Multiplikationsfunktion)

Konstante:

– 0 (die Zahl „Null“)
– 1 (die Zahl „Eins“)

Typisierungen:

Θ_1: $< \in \wp(K \times K)$
Θ_2: $+ \in \mathcal{FUN}(K \times K : K)$
Θ_3: $\cdot \in \mathcal{FUN}(K \times K : K)$
Θ_4: $0 \in K$
Θ_5: $1 \in K$

Hypothesen:

Für alle $a, b, c \in K$:
H_1 $(a + b) + c = a + (b + c)$
H_2 $a + 0 = a$
H_3 $\exists e(a + e = 0)$
H_4 $a + b = b + a$
H_5 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
H_6 $a \cdot 1 = a$
H_7 $a \neq 0 \rightarrow \exists e \in K(a \cdot e = 1)$
H_8 $a \cdot b = b \cdot a$
H_9 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
H_{10} $0 \neq 1$
H_{11} $\neg(a < a)$
H_{12} $a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$
H_{13} $a < b \vee a = b \vee b < a$
H_{14} $a < b \rightarrow a + c < b + c$
H_{15} $0 < a \wedge 0 < b \rightarrow 0 < a \cdot b$
H_{16} $\exists e \in K(a < e < b)$

Modelle:

x ist ein Körper gdw es 0,1 und Mengen $K, <, +, \cdot$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle K, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle$$

und die Komponenten $<, +, \cdot, 0, 1$ haben die Typen Θ_1,..., Θ_5

und die Hypothesen $H_1(K, <, +, \cdot, 0, 1)$ und ... und $H_{16}(K, <, +, \cdot, 0, 1)$ gelten in x.

I(**KOP**) die Menge der intendierten Systeme

Beispiele:
– Menge der ganzen Zahlen
– Menge der rationalen Zahlen
– Menge der reelle Zahlen.

Transformationen:

1) t_a (Translation)
$a \in K$, $t_a \in \mathcal{FUN}(K : K)$, $\forall u \in K(t_a(u) = u + a)$
2) d_a (Dilatation)
$a \in K$, $d_a \in \mathcal{FUN}(K : K)$, $\forall u \in K(d_a(u) = a \cdot u)$
3) iso (Isomorphismus)
$iso \in \mathcal{FUN}(K : K)$, iso ist bijektiv und es gilt
Für alle $a, b, c \in K$: wenn $H_1 - H_{16}$ gilt, dann gilt $H_1 - H_{16}$ auch, wenn a, b, c jeweils durch $iso(a), iso(b), iso(c)$ ersetzt wird.

TA5 Theorie der reellen Zahlen, REE

Grundmenge:

– R (Menge der reellen Zahlen)

Relation:

– $<$ („kleiner als“ für Zahlen)

Funktionen:

– $+$ (Additionsfunktion)
– $\cdot$ (Multiplikationsfunktion)

Konstante:

– 0 (die Zahl „Null“)
– 1 (die Zahl „Eins“)

Typisierungen:

Θ_1: $< \in \wp(R \times R)$
Θ_2: $+ \in \mathcal{FUN}(R \times R : R)$
Θ_3: $\cdot \in \mathcal{FUN}(R \times R : R)$
Θ_4: $0 \in R$
Θ_5: $1 \in R$

Hypothesen:

H_1 $\forall a, b, c \in R(a \neq b \rightarrow a < b \vee b < a)$
H_2 $\forall a, b \in R(a < b \rightarrow \neg(b < a))$
H_3 $\forall a, c \in R(a < c \rightarrow \exists b \in R(a < b \wedge b < c))$
H_4 $\forall X \subseteq R \forall Y \subseteq R(\forall a \in X \forall b \in Y((a < b) \rightarrow \exists c \in R($
$\forall v \in R \forall w \in R(v \in X \wedge w \in Y \wedge a \neq c \wedge b \neq c$
$\rightarrow v < c \wedge c < w))))$
H_5 $\forall a, b, c \in R(a + (b + c) = (a + b) + c)$
H_6 $\forall a, b \in R \exists c \in R(a = b + c)$
H_7 $\forall a, b, c, e \in R(a + b < c + e \rightarrow a < b \vee c < e)$
H_8 $1 \in R$
H_9 $1 < 1 + 1$
H_{10} $\langle R, <, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ist ein Körper

$H_1 - H_9$ finden sich in: Tarski, A. 1977: *Einführung in die mathematische Logik*, (5. Aufl.), Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht, S. 219 - 227.

Modelle:

x ist ein Modell der reellen Zahlen gdw es 0,1 und Mengen $R, <, +, \cdot$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle R, <, +, \cdot, 0, 1\rangle$$

und die Relationen, Funktionen und Konstanten haben die Typen Θ_1, ..., Θ_5 und die Hypothesen $H_1(R, <, +, \cdot, 0, 1)$ und ... und $H_{10}(R, <, +, \cdot, 0, 1)$ gelten in x.

I(REE) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiel:

– die Menge der reellen Zahlen

Definitionen:

1) $\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen

2) $- \in \mathcal{FUN}(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ ('Subtraktionsfunktion')
$\forall \alpha \exists ! \beta \in \mathbb{R}(-(\alpha) = \beta \leftrightarrow \beta + -(\alpha) = 0)$
statt $-(\alpha)$ wird einfach geschrieben $-\alpha$ und
statt $\beta + -(\alpha)$ wird einfach geschrieben $\beta - \alpha$

3) $|\cdot| \in \mathcal{FUN}(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ ('Betragsfunktion')
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (
$(0 < \alpha \vee 0 = \alpha) \rightarrow | \alpha |= \alpha) \wedge$
$(\alpha < 0 \rightarrow | \alpha | = -\alpha))$.

4) $\cdot^2 \in \mathcal{FUN}(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ ('Quadratfunktion')
$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\cdot^2(\alpha) = \alpha \cdot \alpha)$, (man schreibt: $| \alpha |$)

5) $\sqrt[2]{\cdot} \in \mathcal{FUN}(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ ('Wurzelfunktion')
$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists ! \beta \in \mathbb{R}\ (\sqrt[2]{(\alpha)} = \beta \cdot \beta)$, (man schreibt: $\sqrt[2]{\alpha}$)

TA6 Theorie des 3-dimensionalen, reellen Vektorraumes, MAR

Grundmenge:

– O (Menge von Ortspunkten)

Hilfsmenge:

– $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)

Relation:

– $\prec$ (Kleinerrelation)

Funktion:

– d (Abstandsfunktion)

Typisierungen:

Θ_1: $\prec \in \wp(O \times O)$
Θ_2: $d \in \mathcal{FUN}(O \times O : \mathbb{R})$

Definition:

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Hypothesen: (siehe Definitionen in TA5)

H_1 $O = \mathbb{R}^3$
H_2 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ (
$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \prec \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle \leftrightarrow (\mid \alpha_1 \mid < \mid \beta_1 \mid \wedge \mid \alpha_2 \mid < \mid \beta_2 \mid \wedge \mid \alpha_3 \mid < \mid \beta_3 \mid))$
H_3 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ (
$d(\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle) = \sqrt[2]{(\mid \alpha_1 - \beta_1 \mid + \mid \alpha_2 - \beta_2 \mid + \mid \alpha_3 - \beta_3 \mid)^2}$)

Modelle:

x ist ein Modell des 3–dimensionalen, reellen Vektorraumes gdw es Mengen O,$\mathbb{R}$,$\prec$, d gibt, so dass gilt:

$$x = \langle O, \mathbb{R}, \prec, d \rangle$$

und die Relation $\prec$ und die Funktion d haben die Typen Θ_1 und Θ_2 und die Hypothesen $H_1(O,\mathbb{R},\prec,d), ..., H_3(O,\mathbb{R},\prec,d)$ gelten in x.

I(MAR): die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Ackerflächen, kartesisch beschrieben
– Regionen, die durch Landvermessung kartesisch beschrieben sind
– Erdoberfläche des Planeten *Erde*, kartesisch beschrieben
– Mondoberfläche, kartesisch beschrieben
– der Raum „unseres“ Sonnensystems, kartesisch beschrieben.

TA7 Wahrscheinlichkeitstheorie, klassische, WST

Grundmenge:

– Ω (Menge von elementaren Ereignissen)

Relation:

– $\mathcal{A}$ (Menge von Zufallsereignissen)

Funktion:

– $\mathbf{p}$ (Wahrscheinlichkeitsfunktion)

Hilfsmenge:

– $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)

Definitionen:

[0,1] ist das reelle Intervall von 0 bis 1, $[0,1] \subset \mathbb{R}$ und
$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\alpha \in [0,1] \leftrightarrow (\alpha \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq \alpha \wedge \alpha \leq 1))$
A^c ist das Komplement einer Menge A von Ω
$A^c = \{x/x \in \Omega \wedge \neg(x \in A)\}$

Typisierungen:

Θ_1: $\mathcal{A} \in \wp(\wp(\Omega))$
Θ_2: $\mathbf{p} \in \mathcal{FUN}(\mathcal{A} : [0,1])$

Hypothesen:

H_1 $\Omega \in \mathcal{A}$
H_2 $\forall A(A \in \mathcal{A} \rightarrow A^c \in \mathcal{A})$
H_3 für jede Folge $(A_i)_{i=1,2,3...}$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ ist auch $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$
H_4 $\mathbf{p}(\Omega) = 1$
H_5 für jede Folge $A_1, A_2, A_3, ...$ aus $\mathcal{A}$ mit paarweise disjunkten Gliedern gilt: $\mathbf{p}(\cup_i A_i) = \Sigma_i\ \mathbf{p}(A_i)$

Modelle:

x ist ein klassischer Wahrscheinlichkeitsraum gdw es Mengen $\Omega, \mathcal{A}$, $\mathbf{p}$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle \Omega, [0,1], \mathcal{A}, \mathbf{p} \rangle$$

und die Relation $\mathcal{A}$ und die Funktion $\mathbf{p}$ haben die Typen Θ_1 und Θ_2
und die Hypothesen $H_1(\Omega, [0,1], \mathcal{A}, \mathbf{p})$,..., $H_5(\Omega, [0,1], \mathcal{A}, \mathbf{p})$ gelten in x.

I(WST) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Würfelwürfe
– Münzwürfe
– Kartenspiele
– Börsenprogramme

TA8 Wahrscheinlichkeitstheorie, bedingte, WFT

Grundmenge:

– Ω (Menge von elementaren Ereignissen)

Relation:

– $\mathcal{A}$ (Menge von Zufallsereignissen)

Funktion:

– $\mathbf{p}^b$ (bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion)

Hilfsmenge:

– $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)

Definitionen: (siehe auch TA7)

$\mathbf{p}(X|Y) := \mathbf{p}^b(X,Y)$ (bedingte Wahrscheinlichkeit)

Typisierungen:

Θ_1: $\mathcal{A} \in \wp(\wp(\Omega))$
Θ_2: $\mathbf{p}^b \in \mathcal{FUN}(\mathcal{A} \times \mathcal{A} : [0,1])$

Hypothesen:

H_1 $\Omega \in \mathcal{A}$
H_2 $\forall A(A \in \mathcal{A} \rightarrow A^c \in \mathcal{A})$
H_3 für jede Folge $(A_i)_{i=1,2,3...}$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ ist auch $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$
H_4 $\forall A \in \mathcal{A}$ ($\mathbf{p}^b(\Omega, A) = 1$)
H_5 $\forall A, B \in \mathcal{A}$ ($\mathbf{p}^b(A,B) + \mathbf{p}^b(A^c, B) = 1$)
H_6 $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$ ($\mathbf{p}^b(A \cup B, C) = \mathbf{p}^b(A,C) \cdot \mathbf{p}^b(B, A \cup C) =$
$\mathbf{p}^b(B,C) \cdot \mathbf{p}^b(A, B \cup C)$)

Modelle:

x ist ein bedingter Wahrscheinlichkeitsraum gdw es Mengen $\Omega, \mathcal{A}$, $\mathbf{p}^b$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle \Omega, [0,1], \mathcal{A}, \mathbf{p}^b \rangle$$

und die Relation $\mathcal{A}$ und die Funktion $\mathbf{p}^b$ haben die Typen Θ_1 und Θ_2
und die Hypothesen $H_1(\Omega, [0,1], \mathcal{A}, \mathbf{p}^b)$,..., $H_6(\Omega, [0,1], \mathcal{A}, \mathbf{p}^b)$ gelten in x.

I(WFT) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Würfelwürfe
– Münzwürfe
– Kartenspiele
– Börsenprogramme

TA9 Theorie des Monoids, MON

Grundmenge:

– F (Menge von Symbolen)

Relation:

– E (Menge der Elementarsymbole)

Funktionen:

– $*$ (Konkatenationsfunktion)
– η (Koeffizientenfunktion)

Konstante:

– Λ (Symbol für Leerstelle)
– n (die Anzahl der Elementarsymbole)

Hilfsmenge:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)

Definitionen:

$\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$
$s_1 * ... * s_r$ ist eine Abkürzung für $*(s_1, ... * (s_{r-2}, *(s_{r-1}, s_r))...)$,
wobei $s_1, ..., s_r$ Formeln aus F sind
$\eta(i, \Gamma)e_i$ ist eine Abkürzung, die folgendes besagt:
die Formel e_i, die in der Formel Γ genau m_i Mal auftritt, wird m_i Mal konkateniert, wobei m_i durch $\eta(i, \Gamma) = m_i$ bestimmt ist:
$\eta(i, \Gamma)e_i = *(e_i, ... * (e_i, *(e, e_i)...))$
$\Sigma^*_{i=1,...,n}\ \eta(i, \Gamma)e_i$ ist eine Abkürzung für $\eta(1, \Gamma)e_1 * ... * \eta(n, \Gamma)e_n$

Typisierungen:

Θ_1: $n \in \mathbb{N}$
Θ_2: $* \in \mathcal{FUN}(F \times F : F)$
Θ_3: $\eta \in \mathcal{FUN}(\mathbb{N}_n \times F : \mathbb{N})$
Θ_4: $\Lambda \in F$
Θ_5: $E \in \wp(F)$

Hypothesen:

H_1 $0 < n$
H_2 $\exists e_1, ..., e_n \in F(E = \{e_1, ..., e_n\})$
H_3 $*$ ist assoziativ und kommutativ
H_4 $\forall \Gamma \in F(\Gamma = \Sigma^*_{i=1,...,n}\ \eta(i, \Gamma)\ e_i)$
H_5 $\forall \Gamma \in F(\Gamma * \Lambda = \Lambda * \Gamma = \Gamma)$
H_6 $\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in F(\Gamma_1 \neq \Lambda \neq \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 \neq \Gamma_1 * \Gamma_2 \neq \Gamma_1)$

Modelle:

x ist ein Monoid gdw es n, Λ und Mengen $F, E, *, \eta$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle F, \mathbb{N}, \Lambda, n, E, *, \eta \rangle$$

und die Relationen, Funktionen und Konstante haben die Typen Θ_1, ..., Θ_5 und die Hypothesen $H_1(F, \mathbb{N}, \Lambda, n, E, *, \eta)$,..., $H_6(F, \mathbb{N}, \Lambda, n, E, *, \eta)$ gelten in x.

I(MON) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Systeme von chemischen Formeln

TA10 Deterministische Spieltheorie in Normalform, SDN

Grundmengen:

– I (eine Menge von Individuen oder Akteuren)
– $\mathbf{A}$ (eine Menge von Handlungen oder Aktionen)
– C (eine Menge von Konsequenzen oder Wirkungen)

Konstante:

– n (Anzahl der Individuen)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)

Definitionen:

D1: $\Pi_n\mathbf{A}$ ist das n-fache kartesische Produkt von $\mathbf{A}$
D2: $\leq_i \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die kleiner-gleich Relation für reelle Zahlen

Funktionen:

– ϕ (Zuordnung von Handlungsräumen)
– $\preceq$ (Zuordnung von Präferenzrelationen)
– g (nicht-deterministische Kausalfunktion)

Definitionen:

D3: Für alle $i \in I$: $A_i = \{a/a \in \phi(i) \subseteq \mathbf{A}\} = \{a_1^i, ..., a_n^i\}$
(A_i ist der Handlungsraum von i)
D4: $A := \Pi_{j\leq n}\ A_j$

Typisierungen:

Θ_1: $n \in \mathbb{N}$
Θ_2: $C \in \wp(\mathbb{R})$
Θ_3: $\phi \in \mathcal{FUN}(I : \wp(\mathbf{A}))$
Θ_4: $\preceq \in \mathcal{FUN}(I : \wp(\Pi_n\mathbf{A} \times \Pi_n\mathbf{A}))$
Θ_5: $g \in \mathcal{FUN}(A : C)$

Definitionen:

D5: $\mathbf{a} \preceq_i \mathbf{a}'$ soll heißen $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle \in \preceq(i)$

Hypothesen

H_1 $I = \{1, ..., n\} \subset \mathbb{N}$
H_2 $\mathbf{A} = \cup_{j\leq n}\ A_j$
H_3 $\forall i \in I \forall a_1, ..., a_n, a_1', ..., a_n'$ (
$\langle a_1, ..., a_n \rangle \preceq_i \langle a_1', ..., a_n' \rangle \rightarrow a_i \in A_i \wedge a_i' \in A_i$)
H_4 für alle $i \in I$ gilt: $\preceq(i)$ ist konnex, reflexiv und transitiv
H_5 Für alle $i \in I$ und alle $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A(\mathbf{a} \preceq_i \mathbf{a}' \leftrightarrow g(\mathbf{a}) \leq_i g(\mathbf{a}'))$

Lemma: $\preceq(i) \subset A \times A$

Modelle:

x ist ein Modell der elementare Spieltheorie in Normalform gdw es Mengen $I, \mathbf{A}, C, n, \phi \preceq, g$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle I, \mathbf{A}, C, n, \ \mathbb{N}, \mathbb{R}, \phi, \preceq, g \rangle$$

und die Funktionen haben die Typen Θ_1, ..., Θ_5 und die Hypothesen $H_1(I, \mathbf{A}, C, \ \mathbb{N}, \mathbb{R}, n.\phi, \preceq, g)$, ..., $H_5(I, \mathbf{A}, C, \ \mathbb{N}, \mathbb{R}, n, \phi, \preceq, g)$ gelten in x.

I(SDN) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Handlungsbeziehungen zwischen Personen
– Beziehungen von Gruppenhandlungen

TA11 Indeterministische Spieltheorie in Normalform, SIN

Grundmengen:

– I (eine Menge von Individuen oder Akteuren)
– Ω eine endliche Menge (von möglichen Zuständen)
– $\mathbf{A}$ eine Menge (von Handlungen oder Aktionen)
– $\mathbf{S}$ eine endliche Menge (von 'Signalen')

Hilfsmengen:

– $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)
– $\mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen)
– [0,1] (das reelle Intervall von 0 bis 1)

Relationen:

– Σ (σ-Algebra über Ω)

Funktionen:

– ξ (Zuordnung von Handlungssystemen zu Akteuren)
– ψ (Zuordnung von Signalsystemen zu Akteuren)
– τ (Zuordnung von Signalfunktionen zu Akteuren)
– p (Zuordnung von Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu Akteuren)
– $\preceq$ (Zuordnung von Präferenzrelationen zu Akteuren)

Konstante:

– n (Anzahl der Individuen)

Typisierungen:

Θ_1: $n \in \mathbb{N}$
Θ_2: $\Sigma \in \wp(\Omega)$
Θ_3: $\xi \in \mathcal{FUN}(I : \wp(\mathbf{A}))$
Θ_4: $\psi \in \mathcal{FUN}(I : \wp(\mathbf{S}))$
Θ_5: $\tau \in \mathcal{FUN}(I : \wp(\Omega \times \mathbf{S}))$
Θ_6: $p \in \mathcal{FUN}(I : \wp(\Sigma \times [0,1]))$
Θ_7: $\preceq \in \mathcal{FUN}(I : \wp((A \times \Omega) \times (A \times \Omega)))$

Definitionen:

D1: A_i ist eine Abkürzung für $\xi(i)$, $A_i = \xi(i) \in \wp(\mathbf{A})$, $A_i \subseteq \mathbf{A}$
D2: S_i ist eine Abkürzung für $\psi(i)$, $S_i = \psi(i) \in \wp(\mathbf{S})$, $S_i \subseteq \mathbf{S}$
D3: τ_i ist eine Abkürzung für $\tau(i)$, $\tau_i = \tau(i) \in \wp(\Omega \times \mathbf{S})$, $\tau_i \subset \Omega \times \mathbf{S}$
D4: p_i ist eine Abkürzung für $p(i)$, $p_i = p(i) \subset \Sigma \times [0,1]$
D5: $A = \Pi_{i \leq n} A_i$ ist das kartesische Produkt von $A_1, ..., A_n$
D6: $\preceq_i$ ist eine Abkürzung für $\preceq(i) = \preceq_i \subset (A \times \Omega) \times (A \times \Omega)$
D7: Für alle $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A$ und alle $\omega, \omega' \in \Omega$, mit $\mathbf{a} = \langle a_1, ..., a_n \rangle$, $\mathbf{a}' = \langle a'_1, ..., a'_n \rangle$: $\langle \mathbf{a}, \omega \rangle \preceq_i \langle \mathbf{a}', \omega' \rangle$ ist eine Abkürzung für $\langle \langle \mathbf{a}, \omega \rangle \rangle, \langle \mathbf{a}', \omega' \rangle \rangle \in \preceq_i$

Hypothesen

H_1 $\quad I = \{1, ..., n\} \subset \mathbb{N}$
H_2 $\quad$ Für alle $i \leq n$: $\langle \Omega, \Sigma, p_i \rangle$ ist ein klassischer Wahrscheinlichkeitsraum
H_3 $\quad$ Für alle $i \leq n$, alle $\omega \in \Omega$ und alle $s_i \in S_i$: $0 < p_i(\tau^{-1}(\langle \omega, s_i \rangle))$
H_4 $\quad$ Für alle $i \in I$ gilt: $\preceq_i$ ist konnex, reflexiv und transitiv

Modelle:

x ist ein Modell der indeterministischen Spieltheorie in Normalform gdw es Mengen $I, \mathbf{A}, \Omega, \mathbf{S}, \Sigma, n, \tau, p, \preceq$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle I, \mathbf{A}, \Omega, \mathbf{S}, \mathbb{R}, \mathbb{N}, [0,1], n, \Sigma, \tau, p, \preceq \rangle$$

und die Funktionen und die Konstante haben die Typen Θ_1, ..., Θ_7
und die Hypothesen $H_1(I, \mathbf{A}, \Omega, \mathbf{S}, \mathbb{R}, \mathbb{N}, [0,1], n, \Sigma, \tau, p, \preceq)$,...,
$H_4(I, \mathbf{A}, \Omega, \mathbf{S}, \mathbb{R}, \mathbb{N}, [0,1], n. \Sigma, \tau, p, \preceq)$ gelten in x.

I(SIN) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Handlungsbeziehungen zwischen Personen
– Beziehungen von Gruppenhandlungen

TA12 Theorie der Produktionssysteme, TPS

Grundmengen:

– A ist eine Menge (von Zeichen, 'das Alphabet')

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)

Relationen:

– Σ (eine Menge von Startzeichen)
– R (eine Menge von Produktionsregeln)
– Λ (eine Produktion)

Konstante:

– n (maximale Länge von Zeichenfolgen)

Definitionen:

– A^m ist das m-fache kartesische Produkt von A, $m \in \mathbb{N}$
– L ist eine 4-Liste über A gdw es $n_1, ..., n_4 \leq n$ und L_1, L_2, L_3, L_4 gibt, so dass $L_1 \in A^{n_1}, L_2 \in A^{n_2}, L_3 \in A^{n_3}, L_4 \in A^{n_4}$ und $L = \langle L_1, L_2, L_3, L_4 \rangle$
– ML ist die Menge aller 4-Listen über A
– Wenn $v = \langle w_1, ..., w_u \rangle$ eine Liste ist, schreiben wir $\tilde{v} = \{w_1, ..., w_u\}$

Typisierungen:

Θ_1 $n \in \mathbb{N}$
Θ_2 $\Sigma \in \wp(A)$
Θ_3 $R \in \wp(\cup_n A^n \times \cup_n A^n)$
Θ_4 $\Lambda \in \wp(\mathbb{N} \times ML)$

Hypothesen:

H_1 Für alle $\sigma \in \Sigma$ ist $\langle \langle \sigma \rangle, \langle \sigma \rangle, \langle \sigma \rangle, \langle \sigma \rangle \rangle$ eine 4-Liste über A
H_2 $\forall i \in \mathbb{N} \; \forall L_1, L_2 \in ML \; (\langle i, L_1 \rangle \in \Lambda \wedge \langle i, L_2 \rangle \in \Lambda \rightarrow L_1 = L_2)$
H_3 H_3-a oder H_3-b, wobei:
H_3-a es gibt ein kleinstes $i_0 \in \mathbb{N}$ und ein $L \in ML$, so dass $\langle i_0, L \rangle \in \Lambda$
und es gilt:
für alle $i > i_0$ und für alle $L' \in ML$ gilt: $\langle i, L' \rangle \notin \Lambda$
und
für alle $i < i_0$ gilt $L_4^i = L_1^{i+1}$
H_3-b für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt es $L^i, L^{i+1} \in ML$, so dass $\langle i, L^i \rangle \in \Lambda$
und $\langle i+1, L^{i+1} \rangle \in \Lambda \wedge L_4^i = L_1^{i+1}$
H_4 Für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $L \in ML$, wenn $\langle i, L \rangle \in \Lambda$, dann gilt
1) $\tilde{L}_1 \subseteq \tilde{L}_2$
2) $\tilde{L}_4 \subseteq \tilde{L}_3$
3) $\langle L_2, L_3 \rangle \in R$

Modelle:

x ist ein Modell eines Produktionssystems gdw es Mengen A, Σ, R, Λ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle A, \mathbb{N}, n, \Sigma, R, \Lambda \rangle$$

und die Relationen und Konstanten haben die Typen Θ_1,..., Θ_4 und die Hypothesen $H_1(A, \mathbb{N}, n, \Sigma, R, \Lambda)$, ..., $H_4(A, \mathbb{N}, n, \Sigma, R, \Lambda)$ gelten in x.

Definitionen:

– p ist die Produktion in x gdw $x = \langle A, \mathbb{N}, n, \Sigma, R, \Lambda \rangle$ ein Modell eines Produktionssystems ist und $p = \langle L^1, L^2, L^3, ... \rangle$, wobei $\langle i, L^i \rangle \in \Lambda$
– $p \in PS(A, \Sigma, R)$ ist eine Abkürzung für 'p ist die Produktion in x'
– Wenn H_3-a zutrifft, bezeichnen wir die letzte 4-Liste durch $end(p)$, d.h. $end(p) = L^{i_0}$.

I(TPS) ist die Menge der intendierten Systeme

Beispiele:
– Bildung von Zeichenfolgen durch Regeln

Theorien aus der Naturwissenschaft

TB1 Empirische Geometrie, GEO

Grundmengen:

– P (eine Menge von geometrischen Punkten)
– L (eine Menge von Linien)
– E (eine Menge von Ebenen)

Relationen:

– zw (Zwischenrelation)
– kon (Kongruenzrelation)

Typisierungen:

Θ_1: $zw \in \wp(P \times P)$
Θ_2: $kon \in \wp(P \times P \times P \times P)$

Definitionen:

$\mathit{kollinear}(a, b, c)$ gdw $\exists l \in L(a \in l \wedge b \in l \wedge c \in l)$
$\mathit{nicht\text{-}kollinear}(a, b, c)$ gdw $\neg\exists l \in L(a \in l \wedge b \in l \wedge c \in l)$
$a, b, c \in x$ gdw $a \in x \wedge b \in x \wedge c \in x$
$ZW(a, l, b)$ gdw $\neg(a \in l \wedge b \in l \wedge \exists c \in l(zw(a, c, b)))$

Hypothesen:

$H1$ $\forall l, l' \in L \exists a, b \in P(a \neq b \wedge a \in l \wedge b \in l)$
$H2$ $\forall a, b \in P \exists l \in L(a \in l \wedge b \in l)$
$H3$ $\forall a, b \in P(a \neq b \rightarrow \exists l \in L(a \in l \wedge b \in l \wedge$
$\forall l' \in L(a \in l' \wedge b \in l' \rightarrow l = l'))$
$H4$ $\forall e \in E \exists a, b, c \in P(\mathit{nicht\text{-}kollinear}(a, b, c) \wedge a \in e \wedge b \in e \wedge$
$c \in e)$
$H5$ $\forall a, b, c \in P \exists e \in E(a, b, c \in e \wedge \forall e' \in P(a, b, c \in e' \rightarrow e = e'))$
$H6$ $\forall a, b, c \in P(\ \mathit{nicht\text{-}kollinear}(a, b, c) \rightarrow \exists e \in E(a, b, c \in e \wedge$
$\forall e' \in E(a, b, c \in e' \rightarrow e = e')))$
$H7$ $\forall l \in L \forall e \in E(\exists a, b \in P(a, b \in l \wedge a, b \in e) \rightarrow l \subseteq e)$
$H8$ $\forall e, e' \in E(\exists a, b \in P(a \in e \wedge a \in e') \rightarrow$
$\exists b \in P(a \neq b \wedge b \in e \wedge b \in e'))$
$H9$ $\exists a, b, c, d \in P(a \neq b \wedge a \neq c \wedge a \neq d \wedge b \neq c \wedge$
$b \neq d \wedge c \neq d)$
$H10$ $\forall a, b, c \in P(zw(a, b, c) \rightarrow \exists l \in L(a \neq b \wedge a \neq c$
$\wedge\, b \neq c \wedge a, b, c \in l))$
$H11$ $\forall a, b, c \in P(zw(a, b, c) \rightarrow zw(c, b, a))$
$H12$ $\forall a, b, c \in P(zw(a, b, c) \rightarrow \neg zw(b, a, c))$
$H13$ $\forall a, b, c \in P(\mathit{kollinear}(a, b, c) \wedge \mathit{disjunkt}(a, b, c) \rightarrow$
$zw(a, b, c) \vee zw(b, c, a) \vee zw(c, a, b))$
$H14$ $\forall a, b \in P(a \neq b \rightarrow \exists c \in P(zw(a, b, c)))$
$H15$ $\forall a, b \in P(a \neq b \rightarrow \exists c \in P(zw(a, c, b)))$
$H16$ $\forall a, b, c, d \in P(zw(a, b, c) \wedge zw(b, c, d) \rightarrow zw(a, d, b))$
$H17$ $\forall a, b, c, d \in P(zw(a, b, d) \wedge zw(b, c, d) \rightarrow zw(a, b, c))$

$H18$ $\forall e \in E \forall a, b, c \in P \forall l \in L\ (kollinear(a, b, c) \wedge$
$(ZW(a, l, b) \wedge c \notin l \rightarrow ZW(b, l, c) \vee ZW(a, l, c)))$
$H19$ $\forall a, b, c \in P(kon(a, a, b, c) \rightarrow b = c))$
$H20$ $\forall a, b \in P(kon(a, b, b, a))$
$H21$ $\forall a, b, c_1, d_1, c_2, d_2 \in P(kon(a, b, c_1, d_1) \wedge kon(a, b, c_2, d_2) \rightarrow$
$kon(c_1, d_1, c_2, d_2))$
$H22$ $\forall X, Y \in \wp(P)(X \neq \emptyset \wedge Y \neq \emptyset \rightarrow$
$\exists a \in P \forall b, c \in P(b \in X \wedge c \in Y \rightarrow zw(b, a, c) \rightarrow$
$\exists d \in P \forall a_1 \in P \forall b_1 \in P(a_1 \in X \setminus \{d\} \wedge b_1 \in Y \setminus \{d\} \rightarrow$
$zw(a_1, d, b_1)))$
$H23$ $\forall e \in E \forall l \in L \forall a \in P \setminus l \exists l' \in L(a \in l' \wedge l \cap l' = \emptyset)$

Modelle:

x ist ein Modell **M(GEO)** der Geometrie gdw es Mengen P, zw, kon gibt, so dass gilt:

$$x = \langle P, zw, kon \rangle$$

und die Relationen zw, kon haben die Typen Θ_1 und Θ_2
und die Hypothesen $H_1(P, zw, kon), ..., H_{23}(P, zw, kon)$ gelten in x.

I(GEO) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Ackerflächen in Ägypten, zu verschiedenen Perioden
– Ackerflächen in Mesopotamien, zu verschiedenen Perioden
– Regionen, die durch Landvermessung kartisiert sind
– Erdoberfläche des Planeten *Erde*
– Mondoberfläche
– der Raum „unseres“ Sonnensystems.

TB2 Klassische Stoßmechanik, KSM

Rekonstruktion:
Balzer, W., Moulines, C. U., Sneed, J .D. (1987): *An Architectonic for Science*, III.1, Dordrecht, Reidel.

Grundmengen:

– P (Menge von materiellen Objekten)
– T (Menge von Zeitpunkten)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)

Relationen:

– v Geschwindigkeitsfunktion
– m Massefunktion

Definition:

– $\mathbb{R}^3$ (die Menge der 3-dimensionalen, reellen Vektoren)

Typisierungen:

Θ_1 $v \in \mathcal{FUN}(P \times T : \mathbb{R}^3)$
Θ_2 $m \in \mathcal{FUN}(P : \mathbb{R})$

Hypothesen:

H_1 $T \subset \mathbb{R} \wedge T = \{-1, 1\}$
H_2 $\forall p \in P(m(p) > 0)$
H_3 $\forall t, t' \in T(\Sigma_{p \in P}\, m(p) \cdot v(p,t) = \Sigma_{p \in P}\, m(p) \cdot v(p,t'))$

Modelle:

x ist ein Modell der klassischen Stoßmechanik gdw es Mengen P, T, v, m gibt, so dass gilt:

$$x = \langle P, T, \mathbb{R}^3, v, m \rangle$$

und die Funktionen und Konstanten haben die Typen Θ_1, ..., Θ_2
und die Hypothesen $H_1(P, T, \mathbb{R}^3, v, m)$, ..., $H_3(P, T, \mathbb{R}^3, v, m)$ gelten in x.

I(KSM) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Stoßexperimente in physikalischen Labors
– Stöße in Billiardtischen

$\mathbf{M}_p(\mathbf{KSM})$ ist die Klasse aller Systeme $\langle P, T, \mathbb{R}^3, v, m \rangle$, die außer den Hypothesen H_2 und H_3 alle oben genannten Bedingungen erfüllen.

Definition:

$\mathbf{P} = \cup \{P^x / x \in \mathbf{M}_p(\mathbf{KSM}) \wedge x = \langle P^x, ... \rangle\}$

Querverbindungen:

$\mathbf{Q}_1(\mathbf{KSM})$ (Erhaltung der Masse)

$X \in \mathbf{Q}_1(\mathbf{KSM})$ gdw $X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{KSM})$ und
für alle $x = \langle P^x, ..., v^x, m^x \rangle \in X$, $y = \langle P^y, ..., v^y, m^y \rangle \in X$,
$p \in P^x$ und $y \in P^y$ gilt:
wenn $p \in P^x \cap P^y$, dann ist $m^x(p) = m^y(p)$

$\mathbf{Q}_2(\mathbf{KSM})$ ('Konkatenation von Massen')

Für alle X gilt: $X \in \mathbf{Q}_2(\mathbf{KSM})$ gdw es eine Funktion $\circ : \mathbf{P} \times \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ gibt,
so dass: $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{KSM})$ und
für alle $x = \langle P^x, ... \rangle, y = \langle P^y, ... \rangle, z = \langle P^z, ..., \rangle \in X$ und alle $p^x \in P^x$ und
$p^y \in P^y$:
wenn $p^x \circ p^y \in P^z$ und
und $((0 < m^x(p^x) \wedge 0 < m^y(p^y)$ oder $(m^x(p^x) > 0 \wedge m^y(p^y) > 0))$,
dann ist $m^z(p^x \circ p^y) = m^x(p^x) + m^y(p^y)$

Spezialisierungen:

M(EKSM), elastische, klassische Stoßmechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, v, m \rangle \in \mathbf{M}(\mathbf{EKSM})$ gdw es $t_1, t_2 \in T$ gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(KSM)**
2) $T = \{t_1, t_2\}$
3) $\Sigma_{p \in P}\ m(p) \cdot \mid v(p, t_1) \mid^2 = \Sigma_{p \in P}\ m(p) \cdot \mid v(p, t_2) \mid^2$

M(IKSM), inelastische, klassische Stoßmechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, v, m \rangle \in \mathbf{M}(\mathbf{IKSM})$ gdw es $t_1, t_2 \in T$ gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(KSM)**
2) $T = \{t_1, t_2\}$
3) $\forall p_1, p_2 \in P\ (\ v(p_1, t_1) = v(p_2, t_2)\ )$

TB3 Klassische Partikelmechanik, KPM

Rekonstruktionen:
McKinsey J. C. C., Sugar, A. C., Suppes, P. (1953): Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics, *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 2.
Balzer, W., Moulines, C. U., Sneed, J. D. (1987): *An Architectonic for Science* III.3, Dordrecht, Reidel.

Grundmengen:

– P (Menge von materiellen Objekten)
– T (Menge der Zeitpunkte)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)

Relationen:

– s Ortsfunktion
– m Massefunktion
– f Kraftfunktion

Definition:

– $\mathbb{R}^3$ (die Menge der 3-dimensionalen, reellen Vektoren)

Typisierungen:

Θ_1 $s \in \mathcal{FUN}(P \times T : \mathbb{R}^3)$
Θ_2 $m \in \mathcal{FUN}(P : \mathbb{R})$
Θ_3 $f \in \mathcal{FUN}(P \times T \times \mathbb{N} : \mathbb{R}^3)$

Definitionen:

$\Sigma_n X(n)$ bedeutet $X(1) + ... + X(n)$
$\ddot{s}(p,t)$ bedeutet 'die zweite Ableitung der Funktion s im zweiten Argument t'
$*$ ist die skalare Multiplikation $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass für alle $u \in \mathbb{R}$ und alle $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \in \mathbb{R}^3$: $u * \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle = \langle u \cdot \alpha_1, u \cdot \alpha_2, u \cdot \alpha_3 \rangle$.

Hypothesen:

H_1 $T \subseteq \mathbb{R}$ und T ist ein offenes Intervall
H_2 $\forall p \in P(m(p) > 0)$
H_3 $\forall p \in P \forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in T(\Sigma_n f(p,t,n) = m(p) * \ddot{s}(p,t))$

Modelle:

x ist ein Modell der klassischen Partikelmechanik gdw es Mengen $P, T, \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^3, s, m, f$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f \rangle$$

und die Funktionen s, m, f haben die Typen Θ_1,...,Θ_3

und die Hypothesen $H_1(P,T,\mathbb{N},\mathbb{R}^3,s,m,f)$ und ... und $H_3(P,T,\mathbb{N},\mathbb{R}^3,s,m,f)$ gelten in x.

I(KPM) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Würfe an der Erdoberfläche
– Fallphänomene an der Erdoberfläche
– Planetensysteme

$\mathbf{M}_p(\mathbf{KPM})$ ist die Klasse aller Systeme $\langle P,T,\mathbb{R}^3,s,mf\rangle$, die außer den Hypothesen alle oben genannten Bedingungen erfüllen.

Definition:

$\mathbf{P} = \cup\{P^x/x \in \mathbf{M}_p(\mathbf{KPM}) \wedge x = \langle P^x,...\rangle\}$

Querverbindungen:

$\mathbf{Q}_1(\mathbf{KPM})$ (Erhaltung der Masse)

$X \in \mathbf{Q}_1(\mathbf{KPM})$ gdw $X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{KPM})$ und
für alle $x = \langle P^x,...,f^x\rangle \in X$, $y = \langle P^y,...,f^y\rangle \in X$,
$p \in P^x$ und $y \in P^y$ gilt:
wenn $p \in P^x \cap P^y$, dann ist $m^x(p) = m^y(p)$

$\mathbf{Q}_2(\mathbf{KPM})$ ('Konkatenation von Massen')

Für alle X gilt: $X \in \mathbf{Q}_2(\mathbf{KPM})$ gdw es eine Funktion $\circ : \mathbf{P}\times\mathbf{P} \to \mathbf{P}$ gibt,
so dass: $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{KPM})$ und
für alle $x = \langle P^x,...\rangle, y = \langle P^y,...\rangle, z = \langle P^z,...,\rangle \in X$ und alle $p^x \in P^x$ und $p^y \in P^y$:
wenn $p^x \circ p^y \in P^z$
und $((0 < m^x(p^x) \wedge 0 < m^y(p^y)$ oder $(m^x(p^x) > 0 \wedge m^y(p^y) > 0))$,
dann ist $m^z(p^x \circ p^y) = m^x(p^x) + m^y(p^y)$

Spezialisierungen:

Newton'sche Partikelmechanik

Definition: ($v \otimes w$ ist das Vektorprodukt)

Für alle $x,P,T,s,m,f,P^*,\mathbb{N}^*,\phi$ gilt: $x[P^*,\mathbb{N}^*,\phi] \in$ **M(NKPM)** gdw
1) $x = \langle P,T,\mathbb{N},\mathbb{R}^3,s,m,f\rangle \in \mathbf{M}(\mathbf{KPM})$
2) $\emptyset \neq P^* \subseteq P \wedge \emptyset \neq \mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{N}$
3) $\phi \in \mathcal{FUN}(P^* \times \mathbb{N}^* : P^* \times \mathbb{N}^*)$ und ϕ ist bijektiv
4) $\forall p,q \in P^*\ \forall i,j \in \mathbb{N}^*$ (wenn $\phi(p,i) = \langle q,j\rangle$, dann gilt:
4.1) $p \neq q \wedge \forall t \in T(f(p,t,i) = -f(q,t,j)$)
4.2) $s(p,t) \otimes f(p,t,i) = s(q,t) \otimes f(q,t,j)$)

$x \in$ **M(NKPM)** ist eine Newton'sche Partikelmechanik gdw es
P^*, $\mathbb{N}^*$ und ϕ gibt, so dass gilt: $x[P^*,\mathbb{N}^*,\phi] \in$ **M(NKPM)**

Eine zugehörige Querverbindung:

$X \in$ **C(NKPM)** ist eine Querverbindung gdw

1) $\emptyset \neq X \subset$ **M(NKPM)**
2) $\forall x, x', P^*, (P^*)', \mathbb{N}^*, (\mathbb{N}^*)', \phi, \phi'$:
wenn $x, x' \in X$, $x[P^*, \mathbb{N}^*, \phi] \in$ **M(NKPM)** und
$x'[(P^*)', (\mathbb{N}^*)' \ \phi'] \in$ **M(NKPM)**,
dann gilt für alle $p, q \in P^x \cap P^{x'}$ und alle $i, j \in \mathbb{N}$:
wenn $\phi(p, i) = \langle q, j\rangle$ dann gilt: $\phi'(p, i) = \langle q, j\rangle$

Isolierte Partikelmechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f\rangle \in$ **M(IKPM)** ist eine klassische isolierte Partikelmechanik gdw es P^* und $\mathbb{N}^*$ gibt, so dass gilt:
1) $x[P^*, \mathbb{N}^*, \phi] \in$ **M(NKPM)**
2) $P^* = P$ und $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}$

Theorem Wenn $\langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f\rangle \in$ **M(IKPM)**, dann gilt für alle $t, t' \in T$:

a) $\Sigma_{p \in P}\ m(p) * \mathrm{D}s(p, t) = \Sigma_{p \in P}\ m(p) * \mathrm{D}s(p, t')$

b) $\Sigma_{p \in P}\ m(p) * (\ s(p, t) \otimes \mathrm{D}s(p, t)\ ) = \Sigma_{p \in P}\ m(p) * (\ s(p, t') \otimes \mathrm{D}s(p, t')\ )$

(Ds ist die Ableitung von s an Argumentstellen, an denen abgeleitet werden kann. $\otimes$ ist das Vektorprodukt.)

Positionsabhängige Partikelmechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f\rangle \in$ **M(PKPM)** ist eine positionsabhängige Partikelmechanik gdw es F gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(KPM)**
2) $F \in \mathcal{FUN}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}\ , \mathbb{R}^3)$ und F ist stetig differenzierbar
3) es gibt $p \in P$ und $i \in \mathbb{N}$
3.1) $\forall t \in T\ (\ f(p, t, i) = F(s(p, t), t)\ )$
3.2) $\exists t \in T(i \leq 3 \rightarrow \mathrm{D}_i\ F(s(p, t), t) \neq 0)$

Konservative Partikelmechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f\rangle \in$ **M(KKPM)** ist eine konservative Partikelmechanik gdw es F gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(PKPM)**
2) $F \in \mathcal{FUN}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}\ , \mathbb{R}^5)$ und F ist stetig differenzierbar
3) $\exists p \in P \exists i \in \mathbb{N}\ \forall t \in T(f(p, t, i) = -\bigtriangledown F(s(p, t), i)\ )$

($\bigtriangledown$ ist die partielle Ableitung des Potentials F)

Wir sagen auch: x ist eine konservative, klassische Partikelmechanik mit F

Hooke'sche Partikelmechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f\rangle \in$ **M(HKPM)** ist eine Hooke'sche Partikelmechanik gdw es F und k gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(KKPM)** mit F
2) $k \in \mathcal{FUN}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^*)$
3) $\forall a \in \mathbb{R}^3\ \forall i \in \mathbb{N}$: $F(a, i) =\mid (k(i)/2) * a \mid^2$

Eine zugehörige Querverbindung:

$X \in$ **C(HKPM)** gdw

1) $\emptyset \neq X \subseteq \mathbf{M(HKPM)}$
2) für alle $x, x' \in X$ und alle $j \in \mathbb{N}$:
wenn $x \in \mathbf{M(HKPM)}$ mit F, k und $x' \in \mathbf{M(HKPM)}$ mit F', k',
dann gilt: $k(j) = k'(j)$.

Klassische Partikelmechanik mit freiem Fall

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f \rangle \in \mathbf{M(FKPM)}$ ist eine klassische Partikelmechanik mit freiem Fall gdw es F und g gibt, so dass gilt:
1) $x \in \mathbf{M(KKPM)}$ mit F
2) $g \in \mathcal{FUN}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$
3) $\exists p \in P \exists i \in \mathbb{N}\ \forall t \in T\ (F(s(p,t), i) = m(p) \cdot g(i) * (s(p,t) / \mid s(p,t) \mid))$
Wir sagen auch: x ist eine $\mathbf{M(FKPM)}$ mit F, g

Eine zugehörige Querverbindung:

$X \in \mathbf{C(FKPM)}$ gdw
1) $\emptyset \neq X \subseteq \mathbf{M(FKPM)}$
2) für alle $x, x' \in X$ und alle $j \in \mathbb{N}$:
wenn $x \in \mathbf{M(FKPM)}$ mit F, g und $x' \in \mathbf{M(FKPM)}$ mit F', g',
dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$: $g(j) = g'(j)$.

Klassische Partikelmechanik mit inverser Quadratfunktion

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f \rangle \in \mathbf{M(IKPM)}$ ist eine klassische Partikelmechanik mit inverser Quadratfunktion gdw es F und h gibt, so dass gilt:
1) $x \in \mathbf{M(KKPM)}$ mit F
2) $h \in \mathcal{FUN}(P \times P, \mathbb{R}^+)$
3) $\exists p \in P\ \exists i \in \mathbb{N}\ \forall t \in T($
$F(s(p,t), i) = \Sigma_{p' \in P, p' \neq p}\ h(p, p') \cdot (1 / \mid s(p,t) - s(p',t) \mid^2))$
Wir sagen auch: x ist eine $\mathbf{M(IKPM)}$ mit F, h

Klassische Gravitationsmechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f \rangle \in \mathbf{M(GKPM)}$ ist eine klassische Gravitationsmechanik gdw es F, g und h gibt, so dass gilt:
1) $x \in \mathbf{M(IKPM)}$ mit F und h
2) $g \in \mathbb{R}^+$
3) $\forall p, p' \in P(h(p, p') = g \cdot m(p) \cdot m(p'))$
Wir sagen auch: x ist eine $\mathbf{M(GKPM)}$ mit F, g, h

Eine zugehörige Querverbindung:

$X \in \mathbf{C(GKPM)}$ gdw
1) $\emptyset \neq X \subseteq \mathbf{M(GKPM)}$
2) für alle $x, x' \in X$ und alle $j \in \mathbb{N}$:
wenn $x \in \mathbf{M(GKPM)}$ mit F, g, h und $x' \in \mathbf{M(IKPM)}$ mit F', g', h',
dann ist $g = g'$.

Klassische elektrostatische Mechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f \rangle \in \mathbf{M(EKPM)}$ ist eine klassische elektrostatische Mechanik gdw es F, h, Q und ϵ gibt, so dass gilt:

1) $x \in$ **M(IKPM)** mit F und h
2) $Q \in \mathcal{FUN}(P, \mathbb{R}^+)$
3) $\epsilon \in \mathbb{R}^+$
4) $\forall p, p' \in P(h(p, p') = \epsilon \cdot Q(p) \cdot Q(p'))$

Klassische einfache Reibungsmechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f \rangle \in$ **M(SKPM)** ist eine klassische einfache Reibungsmechanik gdw ein F, b und l gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(VKPM)** mit F
2) $b \in \mathcal{FUN}(P \times \mathbb{N}, \mathbb{R})$, $l \in \mathbb{N}$ und $l \geq 1$
3) $\exists p \in P \exists i \in \mathbb{N}\ \forall t \in T(f(p, t, i) = b(p, i) * (\mathrm{D}s(p, t))^l)$
(Für ein Vektor $v = \langle v_1, .., v_n \rangle$ ist v^l definiert durch $v^l = \langle v_1^l, ..., v_n^l \rangle$.)

Zeitabhängige Mechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f \rangle \in$ **M(TKPM)** ist eine zeitabhängige Mechanik gdw gilt:
1) $x \in$ **M(KPM)**
2) $\exists p \in P \exists i \in \mathbb{N}\ \exists t \in T\ (\ \mathrm{D}f(p, t, i) \neq 0\ )$

Klassische Lorentz Mechanik

$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f \rangle \in$ **M(LKPM)** ist eine klassische Lorentz Mechanik gdw es F, Q, E, B und c gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(PKPM)** mit F
2) $Q \in \mathcal{FUN}(P \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $E \in \mathcal{FUN}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}\ , \mathbb{R}^3)$ und $B \in \mathcal{FUN}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}\ , \mathbb{R}^3)$
3) $c \in \mathbb{R}^+$
4) $\exists p \in P \exists i \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}$ (
$F(s(p, t), i) = Q(p, t) \cdot (E(s(p, t), t) + (\mathrm{D}s(p, t)/c) \otimes B(s(p, t), t))$

TB4 Relativistische Stoßmechanik, RSM

Rekonstruktionen:
Balzer, W., Moulines, C. U., Sneed, J. C. (1987): *An Architectonic for Science* III.2, Dordrecht, Reidel.

Grundmengen:

– P (Menge von materiellen Objekten)
– T (Menge von Zeitpunkten)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)

Relationen:

– e (Existenzfunktion)
– v (Geschwindigkeitsfunktion)
– m (Massefunktion)

Konstante:

– $\neg ex$ („existiert nicht")
– ex („existiert")

Definition:

$\mathbb{R}^3$ ist die Menge der 3-dimensionalen, reellen Vektoren

Typisierungen:

Θ_1 $e \in \mathcal{FUN}(P \times T : \{0,1\})$
Θ_2 $v \in \mathcal{FUN}(P \times T : \mathbb{R}^3)$
Θ_3 $m \in \mathcal{FUN}(P \times \mathbb{R} : \mathbb{R})$
Θ_4 $\neg ex \in \mathbb{R}$
Θ_5 $ex \in \mathbb{R}$

Definitionen:

$\Sigma_{p \in P} X(p)$ ist eine Abkürzung für
$P = [p_1, ..., p_n]$ *und* $X(p_1) + ... + X(p_n)$
$\mid X \mid$ ist der Betrag des 3-dimensionalen, reellen Vektors X
wenn u, v reelle Zahlen sind, dann ist
$u \cdot v$ die („normale") *Multiplikation* von u und v
wenn u eine reelle Zahl und z ein 3-dimensonaler, reeller Vektor z ist, dann ist
$u * z$ die *skalare Multiplikation* von u und z

Hypothesen:

H_1 $T \subset \mathbb{R} \wedge T = \{t_1, t_2\} \wedge t_1 < t_2$
H_2 $ex = 1 \wedge \neg ex = 0$
H_3 $\forall p \in P \forall \alpha \in \mathbb{R} \; (m(p, \alpha) \geq 0)$

H_4 $\quad \forall t, t' \in T(\Sigma_{p\in P}\ e(p,t)\cdot m(p,|\,v(p,t)\,|) *\ v(p,e) =$
$\Sigma_{p\in P}\ e(p,t')\cdot m(p,|\,v(p,t')\,|) *\ v(p,t')$

Modelle:

x ist ein Modell der relativistische Stoßmechanik gdw es Mengen $P, T, \{ex, \neg ex\}, e, v, m$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle P, T, \mathbb{R}^3, \{ex, \neg ex\}, e, v, m\rangle$$

und die Funktionen und Konstanten haben die Typen Θ_1,...,Θ_5
und die Hypothesen $H_1(P, T, \mathbb{R}^3, \{ex, \neg ex\}, e, v, m)$,..., $H_4(P, T, \mathbb{R}^3, \{ex, \neg ex\}, e, v, m)$ gelten in x.

I(RSM) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Stöße im Atombereich
– Stöße im Universum.

Definitionen:

Seien $x = \langle P^x, ..., v^x, m^x\rangle \in$ **M(RSM)** und $\gamma \in \mathbb{R}^+$ gegeben.

$m_x^r : P \to \mathbb{R}^+$, die *Restmasse* von m^x, ist definiert durch:
$\forall p \in P \forall \alpha \in \mathbb{R}\ (m_x^r(p) = m^x(p,\alpha)\cdot(1-\gamma^2/\alpha^2)^{1/2})$

$\mathbf{M}_p(\mathbf{RSM})$ ist die Klasse aller Systeme $\langle P, ..., m\rangle$, die außer den Hypothesen H_3 und H_4 alle oben genannten Bedingungen erfüllen.

$\mathbf{P} = \cup\{P^x / x \in \mathbf{RSM} \wedge x = \langle P^x, ..., m^x\rangle \wedge \forall p \in P^x(m_x^r(p) \neq 0)\}$

Querverbindungen:

$\mathbf{Q}_1(\mathbf{RSM})$ (Erhaltung der Restmasse von Massen)

$X \in \mathbf{Q}_1(\mathbf{RSM})$ gdw $X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{RSM})$ und
für alle $x = \langle P^x, ..., m^x\rangle \in X$, $y = \langle P^y, ..., m^y\rangle \in X$,
$p \in P^x$ und $y \in P^y$ gilt:
wenn $p \in P^x \cap P^y$ und $m_x^r(p) \neq 0$ und $m_y^r(p) \neq 0$, dann ist $m^x(p) = m^y(p)$

$\mathbf{Q}_2(\mathbf{RSM})$ (‘Konkatenation von Massen’)

Für alle X gilt: $X \in \mathbf{Q}_2(\mathbf{RSM})$ gdw es eine Funktion $\circ : \mathbf{P}\times\mathbf{P} \to \mathbf{P}$ gibt,
so dass: $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{RSM})$ und
für alle $x = \langle P^x, ...\rangle, y = \langle P^y, ...\rangle, z = \langle P^z, ..., \rangle \in X$ und alle $p^x \in P^x$ und $p^y \in P^y$:
wenn $p^x \circ p^y \in P^z$
und $((0 < m_x^r(p^x) \wedge 0 < m_y^r(p^y)$ oder $(m_x^r(p^x) > 0 \wedge m_y^r(p^y) > 0))$,
dann ist $m_z^r(p^x \circ p^y) = m_x^r(p^x) + m_y^r(p^y)$

TB5 Dalton'sche Stöchiometrie, STOI

Rekonstruktionen:
Balzer, W., Moulines, C. U., Sneed, J. D. (1987): The Logical Structure of Daltonian Stoichiometry, *Erkenntnis* 26, 103 - 127.

Grundmengen:

– C (Menge von Substanzen)
– F (Menge von Formeln)
– T (Menge von Zeitpunkten)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der reellen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)

Relationen:

– E (Menge von Elementarformeln)

Funktionen:

– $*$ (Konkatenationsfunktion)
– η (Koeffizientenfunktion)
– ω (Gewichtsfunktion (combining weight function)
– f (Formelfunktion)
– k (Funktion, die die reduzierten, kleinsten Koeffizienten beschreibt)
– μ (Molekulargewichtsfunktion)

Konstante:

– Λ (Leerstelle)
– n (die Anzahl der Elementarformeln)

Definitionen:

$\mathbb{R}_0^+$ ist die Menge der nicht-negativen, reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$ ist die Menge der positiven, reellen Zahlen
$\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$
$s_1 * ... * s_r$ ist eine Abkürzung für $*(s_1, ... * (s_{r-2}, *(s_{r-1}, s_r))...)$,
wobei $s_1, ..., s_r$ Formeln aus F sind
$\eta(i, \Gamma)e_i$ ist eine Abkürzung, die folgendes besagt:
die Formel e_i, die in der Formel Γ genau m_i Mal auftritt, wird m_i Mal konkateniert, wobei m_i durch $\eta(i, \Gamma) = m_i$ bestimmt ist:
$\eta(i, \Gamma)e_i = *(e_i, ... * (e_i, *(e_, e_i)...))$
$\Sigma^*_{i=1,...,n}\ \eta(i, \Gamma)e_i$ ist eine Abkürzung für $\eta(1, \Gamma)e_1 * ... * \eta(n, \Gamma)e_n$

Typisierungen:

Θ_1: $* \in \mathcal{FUN}(F \times F : F)$
Θ_2: $n \in \mathbb{N}$
Θ_3: $\eta \in \mathcal{FUN}(\mathbb{N}_n \times F : \mathbb{N})$

Θ_4: $\Lambda \in F$
Θ_5: $E \in \wp(F)$
Θ_6: $\omega \in \mathcal{FUN}(C \times T : \mathbb{R}_o^+)$
Θ_7: $f \in \mathcal{FUN}(C : F \setminus \{\Lambda\})$
Θ_8: $k \in \mathcal{FUN}(C \times T : \mathbb{N})$
Θ_9: $\mu \in \mathcal{FUN}(F \setminus \{\Lambda\} : \mathbb{R}^+)$

Hypothesen:

H_1 $T \subset \mathbb{R} \wedge T = \{-1, 1\}$
H_2 $*$ ist assoziativ und kommutativ
H_3 $0 < n$
H_4 $\exists e_1, ..., e_n \in F(E = \{e_1, ..., e_n\} \wedge \forall s \in F(s = \Sigma^*_{i=1,...,n}\, \eta(i, \Gamma)e_i))$
H_5 $\forall s \in F(s * \Lambda = \Lambda * s = s)$
H_6 $\forall s_1, s_2 \in F(s_1 \neq \Lambda \neq s_2 \rightarrow s_2 \neq s_1 * s_2 \neq s_1)$
H_7 $\forall s \in C \exists t \in T(\omega(s, t) \neq 0)$
H_8 f ist injektiv
H_9 $\forall \in C \forall t \in T(k(s, t) = 0 \leftrightarrow \omega(s, t) = 0)$
H_{10} $\forall i \leq n \forall e_1, ..., e_n \in E(\mu(\Sigma^*_{i=1,...,n}\, \eta(i, e_i)e_i) = \Sigma_{i=1,...,n}\, \eta(i, e_i) \cdot \mu(e_i))$
H_{11} $\forall t, t' \in T \forall i \leq n(\Sigma_{i=1,...,n} k(s, t) \cdot \eta(i, f(s)) = \Sigma_{i=1,...,n} k(s, t') \cdot \eta(i, f(s)))$
H_{12} $\forall s, s' \in C \forall t, t' \in T(\omega(s', t') \neq 0 \rightarrow$

$$\frac{\omega(s, t)}{\omega(s', t')} = \frac{k(s, t)}{k(s', t')} \cdot \frac{\mu(f(s)}{\mu(f(s'))})$$

Modelle:

x ist ein Modell der Dalton'schen Stöchiometrie gdw es Mengen $F, C, T, n, E, *, \omega, \eta, f, k, \mu$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle F, C, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}, n, E, *, \omega, \eta, f, k, \mu \rangle$$

und die Funktionen und Konstanten haben die Typen Θ_1,...,Θ_9
und die Hypothesen $H_1(F, C, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}, n, E, *, \omega, \eta, f, k, \mu)$ und ... und $H_{12}(F, C, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}, n, E, *, \omega, \eta, f, k, \mu)$ gelten in x.

I(STOI) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Systeme von chemischen Reaktionen

Definitionen:

$\mathbf{M}_p$(**STOI**) ist die Klasse aller Systeme $\langle F, ..., \mu \rangle$, die außer den Hypothesen alle oben genannten Bedingungen erfüllen.

$\mathbf{F} = \cup\{\langle F, *, \Lambda, n, E \rangle / x \in \mathbf{M}_p(\mathbf{STOI}) \wedge x = \langle F, ..., \mu \rangle\}$

Querverbindungen:

$\mathbf{Q}_1(\mathbf{STOI})$ (Formelkonstruktion bleibt in allen Modellen gleich)

$X \in \mathbf{Q}_1(\mathbf{STOI})$ gdw $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{STOI})$ und
für alle $x, y \in X$ gilt:
wenn $x = \langle C^x, ..., \mu^x \rangle$ und $y = \langle C^y, ..., \mu^y \rangle$,
dann ist $\langle F^x, *^x, \Lambda^x, n^x, E^x \rangle = \langle F^y, *^y, \Lambda^y, n^y, E^y \rangle$

$\mathbf{Q}_2(\mathbf{STOI})$ (eine Substanz hat in zwei potentiellen Modellen die gleiche Formel)

$X \in \mathbf{Q}_2(\mathbf{STOI})$ gdw $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{STOI})$ und
für alle $x = \langle C^x, ... \rangle \in X$ und $y = \langle C^y, ... \rangle \in X$ und alle s gilt:
wenn $s \in C^x \cap C^y$, dann ist $f^x(s) = f^y(s)$

$\mathbf{Q}_3(\mathbf{STOI})$ (die Menge der Elementarformeln ist in zwei potentiellen Modellen identisch)

$X \in \mathbf{Q}_3(\mathbf{STOI})$ gdw $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{STOI})$ und
für alle $x = \langle C^x, ... \rangle \in X$ und $y = \langle C^y, ... \rangle \in X$ gilt:
$\pi_7(x) = \pi_7(y)$ (d.h. $E^x = E^y$)

$\mathbf{Q}_4(\mathbf{STOI})$ (Molekulargewicht einer Substanz bleibt in zwei potentiellen Modellen gleich)

$X \in \mathbf{Q}_4(\mathbf{STOI})$ gdw $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{STOI})$ und
für alle $x = \langle C^x, ... \rangle \in X$ und $y = \langle C^y, ... \rangle \in X$ und alle s gilt:
wenn $s \in C^x \cap C^y$, dann ist $\mu^x(s) = \mu^y(s)$

TB6 Einfache Gleichgewichtsthermodynamik, SET

Rekonstruktionen: Moulines, C. U. (1975): A Logical Reconstruction of Simple Thermodynamics, *Erkenntnis* 9.

Grundmengen:

– Z (Menge von Zuständen)
– I (Menge von Arten von Substanzen)
– T (Menge von Zeitpunkten)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)

Relationen:

– Z^e (eine Menge von Gleichgewichtszuständen)

Funktionen:

– V (Volumenfunktion)
– N (Molzahlfunktion)
– U (Energiefunktion)
– S (Entropiefunktion)
– f^S (Entropiedarstellung)

Konstante:

– n Anzahl der Substanzarten in einem Modell

Definitionen:

$\mathbb{R}_0^+$ ist die Menge der nicht-negativen, reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$ ist die Menge der positiven, reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$ ist die Menge der n-dimensionalen Tupel von reellen Zahlen
$\mathbb{N}_n = \{1, ...n\}$
$E = \{z/z \in Z \wedge \exists \bar{z} \in Z^e(z \in \bar{z})\}$ ist die Menge der Gleichgewichtszustände
N_i ist die Einschränkung von N auf die Substanzart i,
$N_i : Z \to \mathbb{R}^+$, $N_i(z) = N(i, z)$
$(f^S)^* : Z \to \mathbb{R}$, die Hintereinanderausführung von $U, V, N_1, ..., N_n$ und f^S, ist definiert durch: $(f^S)^*(z) = f^S(U(z), V(z), N_1(z), ..., N_n(z))$
$\mathrm{D}_U f^S$ ist die partielle Ableitung von f^S in Richtung 1, d.h.
$\mathrm{D}_U f^S(y_1, ..., y_n) = \mathrm{D}_1 f^S(y_1, ..., y_n)$.
Durch Abkürzung und Einsetzung schreibt man auch:
$\mathrm{D}_U(f^S)^*(z)$ oder $\mathrm{D}_U f^S(U(z), V(z), N_1(z), ..., N_n(z))$ oder einfach $\mathrm{D}_U f^S(z)$
Eine Funktion $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist streng wachsend gdw
$\forall\langle\alpha_1, ..., \alpha_m\rangle \in \mathbb{R}^m \forall\langle\beta_1, ..., \beta_m\rangle \in \mathbb{R}^m($
$(\alpha_1 \leq \beta_1 \wedge ... \wedge \alpha_m \leq \beta_m \wedge \exists i \in \mathbb{N}\ (i \leq m \wedge \alpha_i < \beta_i))$
$\to g(\alpha_1, ..., \alpha_m) < g(\beta_1, ..., \beta_m))$

Bei einer Funktion $g : X \to \mathrm{I\!R}$, die differenzierbar ist, wird gesagt:
'D$g(a)$ ist die Ableitung von g im Punkt a'
Für Funktionen g und h, $g : X \to \mathrm{I\!R}$ und $h : X \to \mathrm{I\!R}$, welche stetig differenzierbar sind, wird definiert: h wächst monoton mit g gdw
$\forall a \in X(\ \mathrm{D}h(a) \geq 0 \leftrightarrow \mathrm{D}g(a) \geq 0)$

Typisierungen:

Θ_1: $Z^e \in \wp(\wp(Z))$
Θ_2: $n \in \mathrm{I\!N}$
Θ_3: $V \in \mathcal{FUN}(Z : \mathrm{I\!R}^+)$
Θ_4: $N \in \mathcal{FUN}(\mathrm{I\!N} \times Z : \mathrm{I\!R}^+)$
Θ_5: $U \in \mathcal{FUN}(Z : \mathrm{I\!R})$
Θ_6: $S \in \mathcal{FUN}(Z : \mathrm{I\!R})$
Θ_7: $f^S \in \mathcal{FUN}(\mathrm{I\!R}^{|I|+2} : \mathrm{I\!R})$

Hypothesen:

H_1 $Z \subseteq \mathrm{I\!R}$ und Z ist ein offenes Intervall
H_2 $I \subseteq \mathrm{I\!N} \wedge I = \{1, ..., n\}$
H_3 $T = Z$
H_4 f^S ist stetig differenzierbar und streng wachsend
H_5 S wächst monoton mit $(f^S)^*$
H_6 $\forall z(z \in E \leftrightarrow S(z) = f^S(U(z), V(z), N_1(z), ..., N_n(z)))$

Modelle:

x ist ein Modell der einfache Gleichgewichtsthermodynamik gdw es n und Mengen $Z, I, T, Z^e, V, N, U, S, f^S$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle Z, I, T, \mathrm{I\!N}, \mathrm{I\!R},\ n, Z^e, V, N, U, S, f^S \rangle$$

und die Relationen, Funktionen und Konstanten haben die Typen Θ_1,...,Θ_7 und die Hypothesen $H_1(Z, I, T, \mathrm{I\!N}, \mathrm{I\!R},\ n, Z^e, V, N, U, S, f^S)$, ..., $H_6(Z, I, T, \mathrm{I\!N}, \mathrm{I\!R},\ n, Z^e, V, N, U, S, f^S)$ gelten in x.

I(SET) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiel:
– Systeme von chemischen Reaktionen

Definitionen:

$\mathbf{M}_p(\mathbf{SET})$ ist die Klasse aller Systeme $\langle Z, ..., f^S \rangle$, die außer den Hypothesen alle oben genannten Bedingungen erfüllen.
$\mathbf{Z} = \cup\{Z / \exists x(x \in \mathbf{M}_p(\mathbf{SET}) \wedge x = \langle Z, ..., f^S \rangle)\}$

Querverbindungen:

$\mathbf{Q}_1(\mathbf{SET})$ (Zustandsgleichgewicht bleibt erhalten)

$X \in \mathbf{Q}_1(\mathbf{SET})$ gdw $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{SET})$ und
für alle $x, y \in X$ gilt:
wenn $x = \langle Z^x, ..., (f^{S^x})^x \rangle$ und $y = \langle Z^y, ..., (f^{S^y})^y \rangle$ und $z \in \mathbf{Z}$ gilt:
wenn $z \in Z^x \cap Z^y$, dann ist $z \in E^x \leftrightarrow z \in E^y$

$\mathbf{Q}_2(\mathbf{SET})$ (Energie und Entropie bleiben in einem Zustand in zwei potentiellen Modellen gleich)

$X \in \mathbf{Q}_2(\mathbf{SET})$ gdw $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{SET})$ und
für alle $x, y \in X$ und alle $z \in \mathbf{Z}$ gilt:
wenn $x = \langle Z^x, ..., (f^{S^x})^x \rangle$ und $y = \langle Z^y, ..., (f^{S^y})^y \rangle$ und $z \in Z^x \cap Z^y$,
dann ist $U^x(z) = U^y(z)$ und $S^x(z) = S^y(z)$

$\mathbf{Q}_3(\mathbf{SET})$ (Konkatenation von Energie und Entropie)

Für alle X gilt: $X \in \mathbf{Q}_3(\mathbf{SET})$ gdw es eine Funktion $\circ : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ gibt,
so dass: $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{SET})$ und
für alle $x = \langle Z^x, ... \rangle, y = \langle Z^y, ... \rangle, u = \langle Z^u, ..., \rangle \in X$ und alle $z^x \in Z^x$ und $z^y \in Z^y$ gilt: wenn $z^x \circ z^y \in Z^u$
dann ist $U^u(z^x \circ z^y) = U^x(z^x) + U^y(z^y)$ und $S^u(z^x \circ z^y) = S^x(z^x) + S^y(z^y)$

$\mathbf{Q}_4(\mathbf{SET})$ (Energieerhaltung)

Für alle X gilt: $X \in \mathbf{Q}_4(\mathbf{SET})$ gdw es eine Funktion $\circ : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ gibt,
so dass: $\emptyset \neq X \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{SET})$ und
für alle $x = \langle Z^x, ... \rangle \in X$ und alle $z \in Z^x$, wenn $\mathrm{D}U^x(z) > 0$, dann gibt es $y = \langle Z^y, ... \rangle \in X$, $u = \langle Z^u, ..., \rangle \in X$ und $z' \in Z^y$, so dass $\mathrm{D}U^u(z \circ z') = 0$

Weitere Querverbindungen für sog. intensive Größen von **SET** sind in (Balzer, Moulines, Sneed, 1987, II.4.5) beschrieben.

Definition:

$T : E \to \mathrm{I\!R}$ wird definiert durch
$\forall z \in E(\ T(z) = 1/D_U f^S(z)\ )$ (absolute Temperatur von z)

Theorem:

In allen Gleichgewichtszuständen $z \in E$ gilt: $T(z) > 0$.

Spezialisierungen von **SET**:

Nernst'sche einfache Gleichgewichtsthermodynamik

Definition:

$Z_{min}(S) = \{z / z \in Z \wedge \forall z' \in Z(S(z) \leq S(z')\}$
$Z_{min}(U) = \{z / z \in Z \wedge \forall z' \in Z(U(z) \leq U(z')\}$

$x = \langle Z^x, I^x, ..., (f^S)^x \rangle \in \mathbf{M(NSET)}$ ist eine Nernst'sche einfache Gleichgewichtsthermodynamik gdw
1) $x \in \mathbf{M(SET)}$
2) $\emptyset \neq Z_{min}(U) \subseteq Z_{min}(S)$

Eine zugehörige Querverbindung:

$X \in \mathbf{Q(NSET)}$ gdw
1) $\emptyset \neq X \subseteq \mathbf{M}_p(\mathbf{SET})$
2) $\forall x = \langle Z^x, ... \rangle \in X \forall x' = \langle Z^y, ... \rangle \in X, \forall z \in Z^x, \forall z' \in Z^{x'}$ (
$z \in Z_{min}(U_x) \wedge z' \in Z_{min}(U_{x'}) \to U^x(z) = U^{x'}(z') \wedge S^x(z) = S^{x'}(z')$)

Viriale einfache Gleichgewichtsthermodynamik

$x = \langle Z^x, I^x, ..., (f^S)^x \rangle \in$ **M(VSET)** ist eine viriale einfache Gleichgewichtsthermodynamik gdw es R, z_0, g^S und a gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(SET)**
2) $z_0 \in Z$ und $R \in \mathbb{R}$
3a) $g^S \in \mathcal{FUN}(\mathbb{R} : \mathbb{R})$, g^S ist stetig differenzierbar und streng monoton
3b) S ist relativ zu g^S monoton wachsend und $g^S(U(z_0)/N(i, z_0)) = 0$
4) $a \in \mathcal{FUN}(\mathbb{N} \times E_x \times Rge(T) : \mathbb{R})$ und
für alle $z \in E_x$ ist $\Sigma_{n \in \mathbb{N}}(a(n, z, T(z))/(n \cdot (V(z))^n))$ konvergent
5) $\forall z \in Z$ $(\mathrm{D}N(i, z) = 0)$
6) $\forall z(z \in E_x \leftrightarrow$
$f^S(U(z), V(z), N(i, z)) = (N(i, z)/N(i, z_0)) \cdot S(z_0) +$
$N(i, z) \cdot g^S(U(z)/N(i, z)) +$
$N(i, z) \cdot R \cdot (log_n((V(z)/V(z_0)) \cdot (N(i, z_0)/N(i, z)) -$
$\Sigma_{n \in \mathbb{N}}(a(n, z, T(z))/n \cdot (V(z))^n))$
(Rge ist der Wertebereich von a.)

Eine zugehörige Querverbindung:

$X \in$ **Q**(**VSET**) gdw
1) $\emptyset \neq X \subseteq \mathbf{M}_p(\mathbf{SET})$
2) $\forall x = \langle Z^x, I^x, ... \rangle \in X$ $\forall x' = \langle Z^y, I^y, ... \rangle \in X$ $\forall i^x \in I^x$, $\forall i^{x'} \in I^{x'}($
$i^x = i^{x'} \rightarrow (g^S)^x = (g^S)^{x'})$

Einfache Gleichgewichtsthermodynamik für ideale Gase

$x = \langle Z^x, I^x, ..., (f^S)^x \rangle \in$ **M(ISET)** ist eine einfache Gleichgewichtsthermodynamik für ideale Gase gdw es R, z_0, g^S und a gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(VSET)** mit R, z_0, g^S und a
2) $\forall z \in E^x \forall j \in \mathbb{N}$ ($a(j, z, T(z)) = 0)$

Einfache Gleichgewichtsthermodynamik für monoatomare, ideale Gase

$x = \langle Z, I, ..., (f^S) \rangle \in$ **M(MISET)** ist eine einfache Gleichgewichtsthermodynamik für monoatomare, ideale Gase gdw es R, z_0, g^S und a gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(ISET)** mit R, z_0, g^S und a
2) $\forall z(z \in E \leftrightarrow g^S((U(z)/N(i, z)) = 3/2 \cdot R \cdot log_n((T(z)/T(z_0))))$

Van der Waal's Gleichgewichtsthermodynamik

$x = \langle Z, I, ..., (f^S) \rangle \in$ **M(WSET)** ist eine van der Waal's Gleichgewichtsthermodynamik gdw es R, z_0, g^S, a, b und c gibt, so dass gilt:
1) $x \in$ **M(VSET)** mit R, z_0, g^S und a
2) $b, c \in \mathbb{N}$
3) $\forall z \in E(a(1, z, T(z)) = b - (c/R \cdot T(z)) \wedge \forall j > 1(a(j, z, T(z)) = b^{j-1}))$

Gleichgewichtsthermodynamik für schwarze Körper

$x = \langle Z, I, ..., (f^S) \rangle \in$ **M(BSETH)** ist eine Gleichgewichtsthermodynamik für schwarze Körper gdw es a gibt, so dass gilt:

1) $x \in$ **M(SET)**
2) $a \in \mathbb{R}$
3) $\forall z \in Z(N(i, z) = 0)$
4) $\forall z \in Z(f^U(S(z), V(z), N(i, z)) = a \cdot V(z) \cdot (\mathrm{D}_S f^U(z))^4$

TB7 Lagrange Mechanik, LAG

Rekonstruktionen:
Balzer, W., Moulines, C. U., Sneed, J. D. (1987): *An Architectonic for Science* III4, Dordrecht, Reidel.

Grundmengen:

– H (Menge von Dimensionen)
– T (Menge von Zeitpunkten)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)

Funktionen:

– q (generalisierte Koordinatenfunktion)
– K (kinetische Energiefunktion)
– Q (generalisierte Kraftfunktion)

Konstante:

– h (Anzahl der Dimensionen)

Definitionen:

$\mathbb{N}_h$ ist die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, ..., h\}$
Für $i \leq h$ wird $q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert: $q_i(t) = q(i, t)$
$q(t)$ ist eine Abkürzung für $\langle q_1(t), ..., q_h(t)\rangle$
$\dot{q}(t) = \langle \mathrm{D}q_1(t), ..., \mathrm{D}q_h(t)\rangle$

Typisierungen:

Θ_1: $h \in \mathbb{N}$
Θ_2: $q \in \mathcal{FUN}(\mathbb{N}_h \times T : \mathbb{R})$
Θ_3: $K \in \mathcal{FUN}(\mathbb{R}^{2h} \times T : \mathbb{R})$
Θ_4: $Q \in \mathcal{FUN}(\mathbb{N}_h \times T : \mathbb{R})$

Hypothesen:

H_1 $0 < h$
H_2 $T = \mathbb{R}$
H_3 $\forall t \in \mathbb{R}\ \forall i \leq h($
$\mathrm{DD}_{h+i}K(q(t), \dot{q}(t), t) - \mathrm{D}_i K(q(t), \dot{q}(t), t) = Q(i, t)\ )$

x ist ein Modell der Lagrange Mechanik gdw es h und Mengen H, q, K, Q gibt, so dass gilt:

$$x = \langle H, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}, h, q, K, Q\rangle$$

und die Relationen und Funktionen haben die Typen Θ_1,...,Θ_4
und die Hypothesen $H_1(H, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}, h, q, K, Q)$, ...,
$H_3(H, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}, h, q, K, Q)$ gelten in x.

I(LAG), die Menge der intendierten Systeme.

Beispiel:
– Würfe an der Erdoberfläche
– Fallphänomene an der Erdoberfläche
– Planetensysteme

Definitionen:

$s_p : T \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch $s_p(t) = s(p,t)$.
In ähnlicher Weise: $X_p(q(t), \dot{q}(t), t) = X(p, q(t), \dot{q}(t), t)$
$\dot{s}_p$ ist die Ableitung von s_p

Verknüpfung:

V(LAG,KPM), eine Verknüpfung von generalisierten und kartesischen Koordinaten

$ver = \langle x, y, X \rangle$ ist eine Verknüpfung von **M(LAG)** und **M(KPM)** gdw
1) $\langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}, s, m, f \rangle \in$ **M(KPM)** $\wedge \langle H, T', \mathbb{N}, \mathbb{R}$,q,h,K,Q$\rangle \in$ **M(LAG)**
2) $T \subseteq T'$
3) $\exists X : P \times \mathbb{R}^h \times T \to \mathbb{R}^3($
für alle $t \in T$ und alle $p \in P(X(p, q(1,t), ..., q(h,t), t) = s(p,t) \wedge$
X_p ist stetig differenzierbar)
4) $\forall t \in T(K(q(t), \dot{q}(t), t) = \Sigma_{p \in P} 1/2 m(p)(\dot{s}_p(t))^2$)
5) $\forall t, t' \in T(\Sigma_{i \leq h} Q(i,t) \cdot \mid q_i(t) - q_i(t') \mid =$
$\Sigma_{p \in P} \Sigma_{i \leq h} f(p,t,i) \cdot \mid s(p,t) - s(p,t') \mid$)

TB8 Theorie von Kepler, KEP

Rekonstruktionen:
Diederich, W. (2014): *Der harmonische Aufbau der Welt. Keplers wissenschaftliches und spekulatives Werk*, Meiner, Hamburg.

Grundmengen:

– P (Menge von Planeten plus Sonne)
– T (Menge der Zeitpunkte)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)

Relation:

– s Ortsfunktion

Konstanten:

– p_0 (die Sonne)
– k Keplerkonstante

Definition:

– $\mathbb{R}^3$ (die Menge der 3-dimensionalen, reellen Vektoren)

Typisierungen:

Θ_1 $s \in \mathcal{FUN}(P \times T : \mathbb{R}^3)$
Θ_2 $k \in \mathbb{R}^+$
Θ_3 $p_0 \in P$

Hypothesen:

H_1 $\forall t \in T \; (\; \mathrm{D}^2 s(p_0, t) = 0 \;)$
H_2 $\forall t \in T \forall p \in P \; (\; \mathrm{D}^2 s(p,t) = -k \cdot (s(p,t) - s(p_0,t)) / \mid s(p,t) - s(p_0,t) \mid^3 \;)$
H_3 $\forall t \in T \forall p \in P($
$1/2 \cdot \mid \mathrm{D}s(p,t) - \mathrm{D}s(p_0,t) \mid^2 - k \cdot \mid s(p,t) - s(p_0,t) \mid^{-1} < 0 \;)$

Modelle:

x ist ein Modell des Kepler Systems gdw es Mengen $P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, p_0, k$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, p_0, k \rangle$$

und die Funktion s und die Konstanten k und p_0 haben die Typen Θ_1,...,Θ_3 und die Hypothesen $H_1(P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, p_0, k)$ und ... und $H_3(P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, p_0, k)$ gelten in x.

I(KEP) ist die Menge der intendierten Systeme:

Beispiele:
– 'Unser' Planetensystem (einschließlich 'unsere' Sonne)

– Jupiter plus Monde

TB9 Klassische Theorie der Genetik, GEN

Rekonstruktionen:
Balzer, W., Dawe, C. M. (1986): Structure and Comperison of Genetic Theories: I Classical Genetics, *British Journal of Philosophy of Science* 37.
Lorenzano, P. (1995): *Geschichte und Struktur der klassischen Genetik*, Frankfurt/Main etc., Peter Lang.
Balzer, W. & Lorenzano, P. (2000): The Logical Structure of Classical Genetics. *Journal of General Philosophy of Science* 31: 243 - 266.

Grundmengen:

– I (eine Menge von *Individuen*, $\omega \in I$, ω ist ein Individuum)
– CH_1,...,CH_k (eine Liste von Mengen CH_i, $i \leq k$)
  CH_i nennt man einen *Charakterzug*
  ein Element ex^i aus CH_i nennt man eine Ausprägung ('trait') oder eine Ausprägung des Charakterzugs
  (z.B. CH_i 'ist' ein Farbe und $ex^i \in CH_i$ ist die Ausprägung 'gelb')
– $FK_1, ..., FK_s$ (eine Liste von Mengen FK_j, $j \leq s$)
  FK_j nennt man einen *Faktor*
  ein Element η^j aus FK_j nennt man ein *Gen*

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)

Konstante:

– k Anzahl der Charakterzüge
– s Anzahl der Faktorkomponenten

Definitionen:

1) $PH = CH_1 \times ... \times CH_k$ (die Menge der *Phänomene* oder *Charaktere*)
  $\pi \in PH \leftrightarrow \exists ex_1 ... \exists ex_k (\pi = \langle ex_1, ..., ex_k \rangle \wedge ex_1 \in CH_1 \wedge ... \wedge ex_k \in CH_k$)
  (ein Phänomen π wird dargestellt als eine Liste von Ausprägungen)

2) [0,1] ist das Intervall der reellen Zahlen zwischen 0 und 1

3) Y sei eine Menge. $\mathcal{D}(Y)$ ist die Menge aller Verteilungsfunktionen über Y.
  $\mathcal{D}(Y)$ wird wie folgt definiert.
  Für alle $\mathbf{p}$ gilt:
  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}(Y)$ gdw $\mathbf{p} \in \mathcal{FUN}(Y : [0,1])$ und
  $\forall y (y \in Y \rightarrow \Sigma_{y \in Y}\ \mathbf{p}(y) = 1)$

4) $GY = (FK_1 \times FK_1) \times ... \times (FK_s \times FK_s)$, (die Menge der *Gensequenzen*)
  $\gamma \in GY \leftrightarrow \exists \eta_1^1 \exists \eta_2^1 ... \exists \eta_1^s \exists \eta_2^s (\gamma = \langle \langle \eta_1^1, \eta_2^1 \rangle ..., \langle \eta_1^s, \eta_2^s \rangle \rangle \wedge$
  $\eta_1^1 \in FK_1 \wedge \eta_2^1 \in FK_1 \wedge ... \wedge \eta_1^s \in FK_s \wedge \eta_2^s \in FK_s)$
  γ ist eine *Gensequenz* oder ein *Genotyp*); η_i^j ist ein *Gen*.

Funktionen:

- ϕ^{ph} Zuordnungsfunktion für Phänomene, $\phi^{ph} : I \to PH$
- f^{na} Nachkommenschaftsfunktion, $f^{na} : I \times I \to \mathcal{D}(PH)$
- det Bestimmungsfunktion, $det : GY \to PH$
- ver^{GY} Verteilungsfunktion von Genotypen, $ver^{GY} : GY \times GY \to \mathcal{D}(GY)$

Definitionen:

5) Genfaktoren
   Für jede Gensequenz $\langle\langle\eta_1^1, \eta_2^1\rangle, ..., \langle\eta_1^s, \eta_2^s\ \rangle\rangle \in GY$ und für jedes $i \leq s$ ist $\langle\eta_1^i, \eta_2^i\rangle$ ein *Genfaktor.*
   η_1^i, η_2^i sind *allele* Gene; sie 'gehören zusammen'.
   Ein Genfaktor $\langle\eta_1^i, \eta_2^i\rangle$ wird so abgekürzt: $\Psi_i = \langle\eta_1^i, \eta_2^i\rangle$.
   γ ist in s Genfaktoren aufgeteilt: $\gamma = \langle\langle\eta_1^1, \eta_2^1\rangle, ..., \langle\eta_1^s, \eta_2^s\ \rangle\rangle = \langle\Psi_1, ..., \Psi_k\rangle$.

6) $RH(\pi/X)$ ist die relive Häufigkeit des Phänomens $\pi \in PH$ im Bereich X von Individuen ($X \subseteq I$). $RH(\pi/X)$ wird wie folgt definiert:
   $RH(\pi/X) = \aleph(\{\omega/\omega \in X \wedge \phi^{ph}(\omega) = \pi\})/\aleph(X) = k/n$, wobei
   $n = \aleph(X)$ die Anzahl von Individuen aus $X \subseteq I$ ist,
   $k = \aleph(\{\omega/\omega \in X \wedge \phi^{ph}(\omega) = \pi\})$ die Anzahl der Individuen ω aus X, welche den Phänomentyp π haben.

7) Wenn die Menge $Y = \{x_1, ..., x_\kappa\}$ endlich ist (d.h. $\aleph(Y) = \kappa \in \mathbb{N}$) wird folgende Notation verwendet:
   Eine Verteilung $\mathbf{p} \in \mathcal{D}(Y)$ wird so dargestellt: $\mathbf{p} = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_\kappa y_\kappa$, oder kurz: $\mathbf{p} = \Sigma_{i \leq \kappa}\ \alpha_i y_i$ d.h. $\forall i \leq \kappa(\alpha_i \in [0,1] \wedge y_i \in Y \to \mathbf{p}(y_i) = \alpha_i)$.
   Wenn $Y = GY$ schreiben wir $\mathbf{p} = \Sigma_{i \leq s}\ \alpha_i\ \gamma_i$ und wenn $Y = PH$:
   $\mathbf{p} = \Sigma_{i \leq k}\ \alpha_i\ \pi_i$.

8) Seien $\Psi_i = \langle\eta_1^i, \eta_2^i\rangle$ und $\Psi'_i = \langle\xi_1^i, \xi_2^i\rangle$ Genfaktoren.
   Die Menge $\Xi(\Psi_i, \Psi'_i, i)$ von bestimmten Kombinationen aus Ψ_i und Ψ'_i wird wie folgt definiert:
   $\Xi(\Psi_i, \Psi'_i, i) = FK_i \times FK_i = \{\langle\eta_1^i, \xi_1^i\rangle, \langle\eta_1^i, \xi_2^i\rangle, \langle\eta_2^i, \xi_1^i\rangle, \langle\eta_2^i, \xi_2^i\rangle\}$

9) Seien $\gamma = \langle\langle\eta_1^1, \eta_2^1\rangle, ..., \langle\eta_1^s, \eta_2^s\rangle\rangle = \langle\Psi_1, ..., \Psi_s\rangle \in GY$ und
   $\gamma' = \langle\langle\eta_1'^1, \eta_2'^1\rangle, ..., \langle\eta_1'^s, \eta_2'^s\rangle\rangle = \langle\Psi'_1, ..., \Psi'_k\rangle \in GY$ gegeben.
   Die Menge $\Lambda(\gamma, \gamma')$ der Kombinationen aus γ und γ' wird wie folgt definiert.
   $\Lambda(\gamma, \gamma') = \{\langle\Psi''_1, ..., \Psi''_k\rangle/\forall i \leq k(\Psi''_i \in \Xi(\Psi_i, \Psi'_i, i)\}$

10) Zwei Verteilungsfunktionen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}'$ über $\mathcal{D}(GY)$ werden wie folgt 'multipliziert'. Dabei ist ν die Anzahl der Genotypen von GY; $\mu = \aleph(GY)$.
   Seien $\mathbf{p} = \alpha_1^1\gamma_1^1 + ... + \alpha_\mu^1\gamma_\mu^1$ und $\mathbf{p}' = \alpha_1^2\gamma_1^2 + ... + \alpha_\mu^2\gamma_\mu^2$ gegeben.
   $(\alpha_1^1\gamma_1^1 + ... + \alpha_\mu^1\gamma_\mu^1)(\alpha_1^2\gamma_1^2 + ... + \alpha_\mu^2\gamma_\mu^2) =$
   $\alpha_1^1\alpha_1^2\gamma_1^1\gamma_1^2 + ... + \alpha_1^1\alpha_\mu^2\gamma_1^1\gamma_\mu^2 + ... + \alpha_\mu^1\alpha_1^2\gamma_\mu^1\gamma_1^2 + ... + \alpha_\mu^1\alpha_\mu^2\gamma_\mu^1\gamma_\mu^2$,
   dabei sind $\gamma_u^1\gamma_v^2$ $(u, v \leq \mu)$ alle Elemente aus der Menge $\Lambda(\gamma_u^1, \gamma_v^2)$, wie in 9) beschrieben.

11) Diese Multiplikation wird auch iteriert: $\Pi_{i=1}^{\kappa}\ (\alpha_1^i\gamma_1^i + ... + \alpha_\mu^i\gamma_\mu^i)$

12) Die Verteilungsfunktion ver^{PH} über Phänotypen aus PH wird explizit definiert.

$ver^{PH} \in \mathcal{FUN}(PH \times PH : \mathcal{D}(PH))$ und
$\forall \omega, \omega' \in I \forall \pi \in PH$ (
$f^{na}(\omega, \omega') \neq \emptyset \rightarrow ver^{PH}(\phi^{ph}(\omega), \phi^{ph}(\omega'))(\pi) = \mathbf{p}(\pi) =$
$RH(\pi / f^{na}(\omega, \omega'))$)

13) Seien $\aleph(GY) = \mu$, $\gamma, \gamma', \gamma_1, ..., \gamma_\mu \in GY$, $\aleph(PH) = \nu$, $\pi, \pi', \pi_1, ..., \pi_\nu \in PH$, $det(\gamma) = \pi$, $\det(\gamma') = \pi'$,
$ver^{GY}(\gamma, \gamma') = \beta_1\gamma_1 + ... + \beta_r\gamma_r + ... + \beta_\mu\gamma_\mu$,
$ver^{PH}(\pi, \pi') = \alpha_1\pi_1 + ... + \alpha_j\pi_j + ... + \alpha_\nu\pi_\nu$ und $j \leq \nu$ gegeben.
$C(\gamma, \gamma', j) = \{r / r \leq \mu \wedge det(\gamma_r) = \pi_j\}$

Typisierungen:

Θ_1 $\phi^{ph} \in \mathcal{FUN}(I : PH)$
Θ_2 $f^{na} \in \mathcal{FUN}(I \times I : \wp(PH))$
Θ_3 $det \in \mathcal{FUN}(GY : PH)$
Θ_4 $ver^{GY} \in \mathcal{FUN}(GY \times GY : \mathcal{D}(GY))$

Hypothesen:

H_1 $s = k$
H_2 Für $\gamma, \gamma', \gamma_1, ..., \gamma_\mu \in GY$, $\pi, \pi', \pi_1, ..., \pi_\nu \in PH$, $det(\gamma) = \pi$, $\det(\gamma') = \pi'$ und für alle $j \leq \nu$ gilt:
wenn $ver^{GY}(\gamma, \gamma') = \beta_1\gamma_1 + ... + \beta_r\gamma_r + ... + \beta_\mu\gamma_\mu$ und
$ver^{PH}(\pi, \pi') = \alpha_1\pi_1 + ... + \alpha_j\pi_j + ... + \alpha_\nu\pi_\nu$, dann ist
$\alpha_j = \Sigma_{r \in C(\gamma, \gamma', j)}\ \beta_r$
H_3 $\forall \omega, \omega' \in I \forall \gamma, \gamma', \gamma^* \in GY$ ($f^{na}(\omega, \omega') \neq \emptyset \rightarrow$ (
$det(\gamma) = \phi^{ph}(\omega) \wedge det(\gamma') = \phi^{ph}(\omega') \rightarrow$
$ver^{GY}(\gamma, \gamma')(\gamma^*) = ver^{PH}(det(\gamma), det(\gamma'))(det(\gamma^*))$))

Informell formuliert:
H1: Faktoren werden zu Paaren zusammengefasst
H2: Die Verteilung von Genotypen zu Phänotypen erfolgt konservativ, d.h. bei einer Kombination gehen keine Faktoren verloren
H3: Die Eltern, die Nachkommen und ihre Verteilungen passen approximativ zueinander

x ist ein Modell der klassischen Genetik ($x \in \mathbf{M(GEN)}$) gdw es natürliche Zahlen k und s und Mengen $I, CH_1, ..., CH_k, FK_1, ..., FK_s, \phi^{ph}, f^{na}, det, ver^{GY}$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle I, CH_1, ..., CH_k, FK_1, ..., FK_s, \mathbb{N}, [0,1], \phi^{ph}, f^{na}, det, ver^{GY} \rangle$$

und die Funktionen $\phi^{ph}, f^{na}, det, ver^{GY}$ haben die Typen Θ_1,...,Θ_4 und die Hypothesen $H_1(I, ..., ver^{GY})$ und ... und $H_3(I, ..., ver^{GY})$ gelten in x.

I(GEN), die Menge der intendierten Systeme enthält zum Beispiel:
– eine Menge von Pflanzen derselben Art
– eine Menge von Tieren derselben Art
– eine Menge von Menschen

Spezialisierungen:

Klassische Genetik mit gleichverteilten Genotypen (**M(GGT)**)

$x = \langle I, CH_1, ..., CH_k, FK_1, ..., FK_s,$ $\mathbb{N}$,[0,1],$\phi^{ph}, f^{na}, det, ver^{GY}\rangle$ ist eine klassische Gentik mit gleichverteilten Genotypen gdw es $\mu \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt

1) $x \in$ **M(GEN)**
2) $\aleph(GY) = \mu$
3) für alle $\gamma, \gamma' \in GY$, wenn $ver^{GY}(\gamma, \gamma') = \Sigma_{i \leq \mu}\ \alpha_i \gamma_i$, dann gilt $\forall i, j \leq \mu(\alpha_i = \alpha_j)$

Modelle für Mendel's erstes Gesetz (**M(G1T)**)

$x = \langle I, CH_1, ..., CH_k, FK_1, ..., FK_s,$ $\mathbb{N}$,[0,1],$\phi^{ph}, f^{na}, det, ver^{GY}\rangle$ ist ein Modell für Mendel's erstes Gesetz gdw gilt

1) $x \in$ **M(GGT)**
2) $s = 1$

Modelle mit vollständiger Dominanz

$x = \langle I, CH_1, ..., CH_k, FK_1, ..., FK_s,$ $\mathbb{N}$,[0,1],$\phi^{ph}, f^{na}, det, ver^{GY}\rangle$ ist ein Modell mit vollständiger Dominanz gdw gilt

1) $x \in$ **M(G1T)** (d.h. $x = \langle I, CH_1, FK_1,$ $\mathbb{N}$,[0,1],$\phi^{ph}, f^{na}, det, ver^{GY}\rangle$)
2) für alle $ex, ex' \in CH_1$ gibt es genau zwei verschiedene $\eta, \eta' \in FK_1$ so dass
   $\gamma = \langle\langle \eta, \eta' \rangle\rangle \in GY$
   $det(\langle\langle \eta, \eta \rangle\rangle) = ex$
   $det(\langle\langle \eta, \eta' \rangle\rangle) = ex'$
   $det(\langle\langle \eta', \eta \rangle\rangle) = ex'$
   $det(\langle\langle \eta', \eta' \rangle\rangle) = ex'$

Modelle mit unvollständiger Dominanz

$x = \langle I, CH_1, ..., CH_k, FK_1, ..., FK_s,$ $\mathbb{N}$,[0,1],$\phi^{ph}, f^{na}, det, ver^{GY}\rangle$ ist ein Modell mit unvollständiger Dominanz gdw gilt

1) $x \in$ **M(G1T)** ($x = \langle I, CH_1, FK_1,$ $\mathbb{N}$,[0,1],$\phi^{ph}, f^{na}, det, ver^{GY}\rangle$)
2) für alle $ex, ex', ex'' \in CH_1$ gibt es genau zwei verschiedene $\eta, \eta' \in FK_1$ so dass
   $\gamma = \langle\langle \eta, \eta' \rangle\rangle \in GY$
   $det(\langle\langle \eta, \eta \rangle\rangle) = ex$
   $det(\langle\langle \eta, \eta' \rangle\rangle) = ex'$
   $det(\langle\langle \eta', \eta \rangle\rangle) = ex'$
   $det(\langle\langle \eta', \eta' \rangle\rangle) = ex''$

Modelle für zwei gleichverteilte Genkomponenten

$x = \langle I, CH_1, ..., CH_k, FK_1, ..., FK_s,$ $\mathbb{N}$,[0,1],$\phi^{ph}, f^{na}, det, ver^{GY}\rangle$ ist ein Modell für zwei gleichverteilte Genkomponenten gdw gilt

1) $x \in$ **M(GGT)**
2) $s = 2$

TB 10 Theorie der Moleküle, TMO

Grundmenge:

– A (Menge von Atomen)

Relationen:

– KA (Menge von Klasseneinteilungen)
– bo (einfache Bindungen)
– db (Doppelbindungen)

Funktionen:

– ϕ (Ortsbeschreibung)

Konstante:

– δ (Mindestabstand)

Hilfsmenge:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}^+$ (die Menge der positiven reellen Zahlen)
– $\mathbb{R}^3$ (die Menge der 3-dimensionalen reellen Vektoren)

Definitionen:

– $[a_1, a_2]$ ist eine Abkürzung für $\langle a_1, a_2 \rangle \in bo$

Typisierungen:

Θ_1: $KA \in \wp(\wp(A))$
Θ_2: $bo \in \wp(A \times A)$
Θ_3: $db \in \wp(A \times A)$
Θ_4: $\phi \in \mathcal{FUN}(A : \mathbb{R}^3)$
Θ_5: $\delta \in \mathbb{R}^+$

Hypothesen:

H_1 $\langle A, KA \rangle \in \mathbf{M}(\mathbf{KLA}, A)$ (siehe TA1).
H_2 $\forall a_1, a_2 \in A(\langle a_1, a_2 \rangle \in bo \leftrightarrow \langle a_2, a_1 \rangle \in bo)$
H_3 $\forall a_1, a_2 \in A(\langle a_1, a_2 \rangle \in db \leftrightarrow \langle a_2, a_1 \rangle \in db)$
H_4 $\forall a_1, a_2 \in A(\langle a_1, a_2 \rangle \in bo \leftrightarrow \langle a_2, a_1 \rangle \in db)$
H_5 ϕ ist injektiv
H_6 $\forall a \in A \exists b \exists q \in \mathbb{N} \exists a_1, ..., a_q \in A$ (
$a = a_1 \wedge [a_1, a_2] \in bo \wedge ... \wedge [a_{q-1}, a_q] \in bo \wedge b = a_q)$
H_7 $\forall a_1, a_2 \in A(a_1 \neq a_2 \rightarrow \delta \leq \mid \phi(a_1) - \phi(a_2) \mid)$

Modelle:

x ist ein Molekül gdw es δ und eine Menge A gibt, so dass gilt:

$$x = \langle A, \mathbb{N}, \mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}^{3}, KA, bo, db, \phi, \delta \rangle$$

und die Relationen, Funktionen und Konstante haben die Typen Θ_1, ..., Θ_5 und die Hypothesen $H_1(A, \mathbb{N}, \mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}^{3}, KA, bo, db, \phi, \delta)$, ..., $H_6(F, \mathbb{N}, \mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}^{3}, KA, bo, db, \phi, \delta)$ gelten in x.

I(TMO) die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Resultierende Bilder und Repräsentanten von Atomen und Molekülen, die durch verschieden Verfahren sichtbar gemacht werden.

TB11 Theorie der schiefen Ebene, TSE

Rekonstruktion:
Meseli, S., LMU München.

Grundmengen:

– $P = \{p_E, p_a, p_e, p_r, p_h, p_{th}\}$ eine Menge (Partikel)
  p_E ist der Erdmittelpunkt
  p_a und p_e sind die Anfangs- und die Endpunkte der schiefen Ebene
  p_r ist das rollende Partikel
  p_h und p_{th} sind hypothetische Partikel
– T ist eine Menge (Zeitpunkte)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)
– $\mathbb{R}^2$ (die Menge der reellen Zahlenpaare)

Funktionen:

– s (die Ortsfunktion)
– m (die Massefunktion)
– f_G (die Gravitationskraft)
– f_H (die Hangabtriebkraft)
– f_N (die Normalkraft)

Konstante:

– γ (die Gravitationskonstante)
– α (der Winkel der schiefen Ebene)
– t_a (der Anfangszeitpunkt der Bewegung)
– t_e (der Endzeitpunkt der Bewegung)

Typisierungen:

Θ_1 $s \in \mathcal{FUN}(P \times T : \mathbb{R}^2)$
Θ_2 $m \in \mathcal{FUN}(P : \mathbb{R})$
Θ_3 $f_i \in \mathcal{FUN}(P \times T : \mathbb{R}^2)$ für alle $i \leq \{G, H, N\}$
Θ_4 $\gamma \in \mathbb{R}$
Θ_5 $\alpha \in \mathbb{R}$
Θ_6 $t_a \in \mathbb{R}$
Θ_7 $t_e \in \mathbb{R}$

Hypothesen:

H_1 $0 < t_e < t_a < 1$
H_2 $T =]t_a, t_e[$
H_3 s ist zweimal stetig differenzierbar
H_4 $(\mid s(p_a, t_a) - s(p_e, t_a) \mid^2 = \mid s(p_h, t_a) - s(p_e, t_a) \mid^2 + \mid s(p_a, t_a) - s(p_h, t_a) \mid^2$
H_5 $\forall t, t' \in T(s(p_E, t) = s(p_E, t') \wedge s(p_a, t) = s(p_a, t') \wedge s(p_e, t) = s(p_e, t'))$
  und $s(p_h, t) = s(p_h, t')$

H_6 $\gamma > 0$
H_7 $\alpha > 0$
H_8 $\alpha = sin(\mid s(p_h, t_a) - s(p_e, t_a) \mid / \mid s(p_a, t_a) - s(p_e, t_a) \mid)$
H_9 $\forall t \in T \forall p \in P(f_G(p,t) =$
$\gamma \cdot m(p_E) \cdot m(p) \cdot ((s(p,t) - s(p_E, t) \cdot (1/(\mid s(p,t) - s(p_E, t) \mid^2)))$
(die Gravitationsgleichung)
H_{10} $\forall t_1 \in T \exists ! t_2 \in T(t_1 \leq t_2 \rightarrow$
$f_N(p_r, t_1) = s(p_E, t_a) - s(p_r, t_2) \wedge$
$\mid f_N(p_r, t_1) \mid = cos((\mid s(p_r, t_2) - s(p_E, t_2) \mid)/(\mid s(p_r, t_1) - s(p_E, t_1) \mid))$
(die Normalkraft)
$\wedge$
$f_H(p_r, t_1) = s(p_r, t_2) - s(p_r, t_1) \wedge$
$\mid f_H(p_r, t_1) \mid = sin(\mid s(p_r, t_1) - s(p_r, t_2) \mid)/(\mid s(p_r, t_1) - s(p_E, t_1) \mid))$
(die Hangabtriebkraft)
H_{11} $\forall t, t' \in T \forall p \in P \setminus \{p_r, p_{th}\} \forall i \in \{2,3\}(f_i(p,t) = f_i(p,t'))$
H_{12} $y = \langle P, T, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, s, m, f_G, f_H, f_N \rangle \in KPM^2$

In H_{10} bedeutet '!', dass es genau ein t_2 gibt, so dass ... Weiter gilt: $f_N(p_r, t_1) = s(p_E, t_a) - s(p_r, t_2) = s(p_{th}, t_1) - s(p_r, t_1)$.

x ist ein Modell der 2-dimensionalen schiefen Ebene ($x \in$ **M(TSE)**) gdw es reelle Zahlen γ, α, t_a, t_e und Mengen $P = \{p_E, p_a, p_e, p_r, p_h, p_{th}\}, T$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2, s, m, f_G, f_H, f_N$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle P, T, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \gamma, \alpha, s, m, f_G, f_H, f_N \rangle$$

und die Konstanten γ, α, t_a, t_e und Funktionen s, m, f_G, f_H, f_N haben die Typen Θ_1,...,Θ_7 und die Hypothesen $H_1(P, ..., f_N)$ und ... und $H_{12}(P, ..., f_N)$ gelten in x.

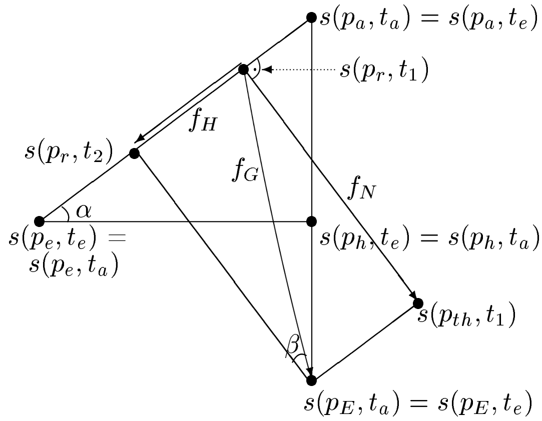
Lemma: Für alle $y \in$ **M(TSE)** und für alle $t \in T$ gilt:
$f_G(p_r, t) = f_N(p_r, t) + f_H(p_r, t)$.

Theorem **TSE** $\subset$ **KPM**^{2}, d.h. **TSE** ist eine Spezializierung von **KPM**^{2}.

I(TSE), die Menge der intendierten Systeme enthält:
– Experimente zur Bestimmung von Kräften, die ein Partikel auf der schiefen Ebene bewegt.

Ein Bild:

$s(p_r, t_1)$ und $s(p_r, t_2)$ sind zwei Orte an denen sich p_r zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 befindet
α ist die Steigung der Rinne, in der p_r rollt
der Vektor f_H von $s(p_r, t_1)$ zu $s(p_r, t_2)$ ist die Hangabtriebkraft
der Vektor f_N von $s(p_r, t_1)$ zu $s(p_{th}, t_1)$ ist die Normalkraft
der Vektor f_G von $s(p_r, t_1)$ zu $s(p_E, t_a)$ ist die Gravitationskraft, die auf p_r zur Zeit t_1 ausgeübt wird $(s(p_E, t_a) = s(p_E, t_1))$.



Zum Verständnis:

$y = \langle P, T, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, s, m, f_1, ..., f_n\rangle$ ist ein Modell der 2-dimensionalen klassischen Partikelmechanik (abgekürzt durch: $y \in \mathbf{KPM}^2$) gdw

1) P ist eine endliche Menge (von Partikeln)
2) $T \subseteq \mathbb{R}$ ist ein offenes Intervall (von Zeitpunkten)
3) $s : T \to \mathbb{R}^2$, s ist zweimal stetig differenzierbar (die Ortsfunktion für die Teilchen)
4) $m : P \to \mathbb{R}$ und $\forall p \in P(m(p) > 0)$ (Massefunktion)
5) für alle $i \leq n : f_i : P \times T \to \mathbb{R}^2$ (Kraftfunktionen)
6) $\forall p \in P \forall t \in T : \Sigma_i f_i(p, t) = m(p) \cdot D^2 s(p, t)$ (D^2 bedeutet die zweite Ableitung von s 'für t').

y ist ein 2-*dimensionales dynamisches Modelle der schiefen Ebene* (abgekürzt durch : $y \in \mathbf{TSE}$) gdw es $P, T, s, m, f_G, f_H, f_N, \gamma, \alpha,$ $p_E, p_a, p_e, p_r, p_t, p_{th}, t_a, t_e$ gibt, so dass gilt

1) $y = \langle P, T, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \gamma, \alpha, s, m, f_G, f_H, f_N\rangle$
2) $\langle P, T, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, s, m, f_G, f_H, f_N\rangle \in KPM^2$
3) $P = \{p_E, p_a, p_e, p_r, p_t, p_{th}\}$
4) $t_a, t_e \in \mathbb{R}$, $0 < t_e < t_a < 1$
   t_a ist der erste Zeitpunkt, zu dem p_r sich bewegt
   t_b ist der letzte Zeitpunkt, zu dem p_r sich bewegt
   Hier ist das Zeitintervall $]t_a, t_b[$ so normiert, dass Winkel direkt in Abstände übersetzt werden können. Durch eine Skalentransformation kann das normierte Modell in ein anderes Zeitintervall eingebettet werden.
5) $T =]t_a, t_b[$
6) $\mid s(p_e, t_a) - s(p_a, t_a) \mid^2 = \mid s(p_e, t_a) - s(p_h, t_a) \mid^2 + \mid s(p_h, t_a) - s(p_a, t_a) \mid^2$ die Anfangsfiguration
7) für alle $t, t' \in T(s(p_E, t) = s(p_E, t') \wedge s(p_a, t) = s(p_a, t') \wedge s(p_e, t) = s(p_e, t')$ $\wedge\, s(p_h, t) = s(p_h, t'))$
8) $\gamma > 0$ (die Gravitationskonstante)
9) $\alpha > 0$ (der Winkel der schiefen Ebene)
10) $\alpha = sin(\mid s(p_h, t_a) - s(p_e, t_a) \mid / \mid s(p_a, t_a) - s(p_e, t_a) \mid)$
11) für alle $t \in T$ und für alle $p \in P$ gilt:

$f_G(p,t) = -\gamma \cdot m(p_E) \cdot m(p) \cdot (s(p_E,t) - s(p,t)) \cdot (1/ \mid s(p_E,t) - s(p,t) \mid^2)$
(die Gravitationsgleichung)
12) für alle $t \in T$:
12.1) $\forall p \in P \setminus \{p_r, p_{th}\} \forall i \in \{2,3\} \forall t' \in T(f_i(p,t) = f_i(p,t'))$
12.2) $f_N(p_r,t) = f_G(p_r,t) \cdot cos(t)$
12.3) $f_H(p_r,t) = f_G(p_r,t) \cdot sin(t)$.

Theorien aus Sozialwissenschaft und Geisteswissenschaft

TC1 Reine Tauschwirtschaft, ÖKO

Rekonstruktionen:
Balzer, W. (1982): A Logical Reconstruction of Pure Exchange Economics, *Erkenntnis* 17.

Grundmengen:

– H (Menge von 'Täuschen')
– W (Menge von Warentypen)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)

Relation:

– E (Menge der Gleichgewichtszustände)

Funktionen:

– g (Funktion von Warenbündeln)
– p (Preisfunktion)
– U (Nutzenfunktion)

Definitionen:

$\mid W \mid$ ist die Anzahl der Warentypen in W, $\mid W \mid = n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^{|W|} = \mathbb{R}^n$ ist die Menge der $\mid W \mid$-dimensionalen, reellen Vektoren

Typisierungen:

– Θ_1 $E \in \wp(\mathcal{FUN}(H \times W : \mathbb{R}))$
– Θ_2 $g \in \mathcal{FUN}(H \times W : \mathbb{R})$
– Θ_3 $p \in \mathcal{FUN}(W : \mathbb{R})$
– Θ_4 $U \in \mathcal{FUN}(H \times \mathbb{R}^{|W|} : \mathbb{R})$

Definitionen:

$B[H, W, g]$ ist die Tauschbegrenzung
$B[H, W, g] = \{g^*/g^* \in \mathcal{FUN}(H \times W : \mathbb{R}) \wedge$
$\forall w \in W(\Sigma_{h \in H}\ g^*(h, w) \leq \Sigma_{h \in H}\ g(h, w)) \wedge$
$\forall h \in H(\Sigma_{w \in W}\ (p(w) \cdot (g^*(h, w) - g(h, w))) = 0)\}$.

Hypothesen:

$H1$ $E \subseteq B[H, W, g]$
$H2$ $\forall g^*(g^* \in E \rightarrow \forall h \in H \forall g^* \in B[H, W, g]($
$U(h, g^*(h, 1), ..., g^*(h, m)) \leq U(h, g(h, 1), ..., g(h, m))))$
$H3$ $E \neq \emptyset$

Modelle:

x ist ein Modell der reinen Tauschwirtschaft gdw es Mengen $H, W, \mathbb{N}, \mathbb{R}, g, p, U, E$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle H, W, \mathbb{N}, \mathbb{R}, g, p, U, E \rangle$$

und die Relationen und Funktionen g, p, U, E haben die Typen Θ_1, ..., Θ_4 und die Hypothesen $H_1(H, W, \mathbb{N}, \mathbb{R}, g, p, U, E)$,...,$H_3(H, W, \mathbb{N}, \mathbb{R}, g, p, U, E)$ gelten in x.

I(ÖKO) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Täusche
– lokale Wochenmärkte
– regionale Märkte
– Börsen.

TC2 Entscheidungstheorie, DEC

Rekonstruktionen:
Balzer, W., Moulines, C. U., Sneed, J. D. (1987): *An Architectonic for Science* I.5, Dordrecht, Reidel.

Grundmengen:

– Ω (Menge von Elementarereignissen)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)

Definition

[0,1] ist das geschlossene Intervall reeller Zahlen zwischen 0 und 1

Relationen:

– H (Menge von Zufallsereignissen)
– $\cap$ (Konjunktion, ‘und’)
– $\cup$ (Adjunktion, ‘oder’)

Funktionen:

– p (Wahrscheinlichkeitsfunktion)
– U (Nutzenfunktion)

Konstante:

– $\mathbf{0}$ (Nullelement)
– $\mathbf{1}$ (Einselement)

Typisierungen:

– Θ_1 $H \in \wp(\wp(\Omega))$
– Θ_2 $\cap \in \mathcal{FUN}(H \times H : H)$
– Θ_3 $\cup \in \mathcal{FUN}(H \times H : H)$
– Θ_4 $p \in \mathcal{FUN}(H : [0{,}1])$
– Θ_5 $U \in \mathcal{FUN}(H : \mathbb{R})$
– Θ_6 $\mathbf{0} \in H$
– Θ_7 $\mathbf{1} \in H$

Hypothesen:

H_1 $\langle \Omega, [0,1], H, p \rangle$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum
H_2 Ω ist endlich
H_3 $\langle H, \cap, \cup, \mathbf{0{,}1} \rangle$ ist eine Boolsche Algebra
H_4 $\forall a, b \in H(a \cap b = \mathbf{0} \rightarrow$
$U(a \cup b) \cdot p(a \cup b) = U(a) \cdot p(a) + U(b) \cdot p(b))$

Modelle:

x ist ein Entscheidungsmodell gdw es $\mathbf{0{,}1}$ und Mengen $\Omega, H, \cap, \cup, p, U$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle \Omega, H, \mathrm{I\!R}, [0,1], \mathbf{0}, \mathbf{1}, \cap, \cup, p, U \rangle$$

und die Relationen, Funktionen und Konstanten haben die Typen Θ_1, ..., Θ_7 und die Hypothesen $H_1(\Omega, H, \mathrm{I\!R}, [0,1], \mathbf{0}, \mathbf{1}, \cap, \cup, p, U)$,..., $H_4(\Omega, H, \mathrm{I\!R}, [0,1], \mathbf{0}, \mathbf{1}, \cap, \cup, p, U)$ gelten in x.

I(DEC) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Systeme von Entscheidungssituationen

TC3 Netzwerktheorie, NET

Rekonstruktionen:
González Ruiz, A. (1997): *Die Netzwerktheorie von R. S. Burt: Eine strukturelle und epistemologische Analyse*, Frankfurt/Main etc. Peter Lang.

Grundmengen:

– A (Akteure)
– BT (Beziehungstypen)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)
– $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
– $[0,1]$ (das Intervall von 0 bis 1)

Definitionen:

D1: $\alpha := \aleph(A)$ (die Kardinalität von A)
$\rho := \aleph(BT)$ (die Kardinalität von BT)

Relationen:

– S (Statusklassen von Akteuren)

Funktionen:

– G (Graphenfunktion)
– $pres$ (Prestigefunktion)

Definitionen:

D2: c ist eine Kette in G des Typs r gdw
$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists a_1, ..., a_n \in A\ \forall k < n(\langle a_k, a_{k+1}\rangle \in G(r))$
$l(c)$ ist die Länge der Kette c in G des Typs r
$K(r)$ ist die Menge aller Ketten in G des Typs r

D3: $sch : BT \times A \times A \to \mathbb{R}^\infty$

$$sch(r,a,b) = \begin{cases} \text{die Länge } n \text{ einer kürzesten Kette zwischen } a \text{ und } b \text{ wenn } n \neq \infty \\ \infty, \text{ wenn es keine kürzeste Kette zwischen } a \text{ und } b \text{ gibt} \end{cases}$$

D4: $f : BT \times A \times A \to \mathbb{R}$
$f(r,a,b) = \aleph(\{u \in A / sch(r,u,a) \leq sch(r,b,a)\}$

D5: $n : BT \times A \to \mathbb{R}$
$n(r,a) = \aleph(\{b \in A / sch(r,b,a) < \infty\})$

D6: $\eta : BT \times A \times A \to [0,1]$ (Intensitätsfunktion)

$$\eta(r,a,b) = \begin{array}{l} 1-(f(r,a,b)/n(r,a)), \text{ wenn } n(r,a) \neq 0 \\ 0, \text{ wenn } n(r,a) = 0 \end{array}$$

D7: $d : R \times A \times A \to \mathbb{R}$ (Abstandsfunktion)

$d(r,a,b) = [\Sigma_{r=1}^{\alpha}\Sigma_{q=1}^{\rho}((\eta(r,a,q)-\eta(r,b,q))^2 + (\eta(r,q,a)-\eta(r,q,b))^2]^{1/2}$

D8: $prom : BT \times A \to \mathbb{R}$ (Prominenzfunktion)

$prom(r,b) = \Sigma_{i=1}^{\alpha}\eta(r,a_i,b)/\alpha$
$(A = \{a_1,...,a_\alpha\})$

D9: $\mathit{self} : BT \times A \to \mathbb{R}$ ('Selbst'funktion)

$\mathit{self}(r,a) = \Sigma_{i=1}^{\alpha}1-(\eta(r,a,b_i)\cdot d(r,a,b_i))/\Sigma_{i=1}^{\alpha}d(r,a,b_i))$

Typisierungen:

Θ_1 $S \in \wp(\wp(A))$
Θ_2 $G \in \mathcal{FUN}(BT : \wp(A \times A))$
Θ_3 $pres \in \mathcal{FUN}(BT \times A : [0,1])$

Hypothesen:

H_1 $\forall s,s' \in S(s \neq \emptyset \wedge (s \cap s' \neq \emptyset \to s = s') \wedge \cup\{s/s \in S\} = A)$
(S ist eine Zerlegung von A)
H_2 $\forall s \in S \forall r \in BT \forall a,b \in A\ (a \in s \wedge b \in s \to d(r,a,b) = 0)$
H_3 $\forall a \in A \forall r \in BT\ (\ prom(r,a)\cdot \mathit{self}(r,a) = 1 \to pres(r,a) = 1)$
H_4 $\forall a \in A \forall r \in BT\ (\ prom(r,a)\cdot \mathit{self}(r,a) = 0 \to pres(r,a) = 0)$
H_5 $\forall a,b \in A \forall r \in BT\ (d(r,a,b) = 0 \to pres(r,a) = pres(r,b))$
H_6 $\forall r \in BT \forall s \in S \forall a,b \in s\ (pres(r,a) = pres(r,b))$

Modelle:

x ist ein Netzwerk gdw es Mengen $A, BT, S, G, pres$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle A, BT, S, G, pres\rangle$$

und die Relation S und die Funktionen $G, pres$ haben die Typen $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ und die Hypothesen $H_1(A,BT,S,G,pres)$,..., $H_6(A,BT,S,G,pres)$ gelten in x.

I(NET) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Personengruppen, in denen es Statusunterschiede gibt

TC4 Theorie der doppelten Buchaltung, DCA

Rekonstruktionen:
Balzer, W., Mattessich, R. (2000): *Formalizing the Basis of Accounting*, in: Balzer, W., Sneed, J. D., Moulines, C. U. (eds.) *Structuralist Knowledge Representation – Paradigmatic Examples*, Rodopi, Amsterdam, *Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities* 75, 99 - 126.

Grundmengen:

– T eine endliche, nicht leere Menge (Zeitpunkte)
– O eine endiche, nicht leere Menge (ökonomische Objekte)
– A eine endliche, nicht leere Menge (Namen für Konten)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)
– $\mathbb{R}^+$ (die Menge der reellen, positiven Zahlen)
– $S = \{+, -\}$ eine Menge (von Zeichen)

Relationen:
– $\prec$ ('später als'-Relation zwischen Zeitpunkten)
– P (eine Zerlegung der Menge der Zeitpunkte)
– *trans* (Transaktionen)
– *entries* (Einträge)

Funktionen:

– Ψ (Repräsentationsfunktion)

Typisierungen:

Θ_1 $\prec \in \wp(T \times T)$
Θ_2 $P \in \wp(\wp(T))$
Θ_3 $trans \in \wp(T \times O \times O)$
Θ_4 $entries \in \wp(T \times A \times \mathbb{N} \times S \times \mathbb{R}^+)$
Θ_5 $\Psi \in \mathcal{FUN}(trans : entries \times entries)$

Hypothesen:

H_1 Für alle $t \in T$ und alle $o, o' \in O$, wenn $\langle t, o, o' \rangle \in trans$, dann gilt $o \neq o'$

H_2 Für alle $\langle t, a, i, s, v \rangle \in entries$ und alle $t \in p \in P$ gibt es t', i', s', v' so dass t' der früheste Zeitpunkt von p relativ zu $\prec$ ist und so dass gilt: $\langle t', a, i', s', v' \rangle \in entries$

H_3 Für alle $t, t_1, t_2 \in T$, $o, o' \in O$, $i, i' \in S$ und alle $v, v' \in \mathbb{R}^+$, wenn $\Psi(t, o, o') = \langle \langle t_1, a, i, s, v \rangle, \langle t_2, a', i', s', v' \rangle \rangle$, dann ist
1) $t_1 = t_2$
2) $a \neq a'$ und $v = v'$ und $s = -$ und $s' = +$

H_4 Für alle $ta, ta' \in trans$ und alle $e_1, e_2, e_1', e_2' \in entries$,

wenn $ta \neq ta'$ und $\Psi(ta) = \langle e_1, e_2 \rangle$ und $\Psi(ta') = \langle e_1', e_2' \rangle$,
dann $\{e_1, e_2\} \cap \{e_1', e_2'\} = \emptyset$

H_5 $\quad$ $\mathit{entries} = \{e / \exists ta \in \mathit{trans}\ \exists e_1, e_2 \in \mathit{entries}\ ($
$\Psi(ta) = \langle e_1, e_2 \rangle \wedge e \in \{e_1, e_2\})\}$

Modelle:

x ist ein Modell für die doppelte Buchführung gdw es Mengen $T, O, A,$ $\prec, P, \mathit{trans}, \mathit{entries}, \Psi$ gibt, so dass gilt:

$$\langle T, O, A,\ \mathbb{N},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}^+, S, \prec, P, \mathit{trans}, \mathit{entries}, \psi \rangle$$

und die Relationen $\prec, P, \mathit{trans}, \mathit{entries}$ und die Funktion Ψ haben die Typen $\Theta_1, ..., \Theta_5$ und die Hypothesen
$H_1(T, O, A,\ \mathbb{N},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}^+, \prec, P, \mathit{trans}, \mathit{entries}, \Psi)$, ...,
$H_5(T, O, A,\ \mathbb{N},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}^+, \prec, P, \mathit{trans}, \mathit{entries}, \Psi)$ gelten in x.

I(DCA) ist die Menge der intendierten Systeme

Beispiele:
– Buchhaltungssysteme

TC5 Theorie linguistischer Strukturen, TLS

Rekonstruktionen:
Balzer, W., Gonzalo, A. (2012): Eine strukturalistische Rekonstuktion einer linguistischen Theorie, in: *Festschrift für P. A. Gemtos* ($\Delta\omega\rho\eta\mu\alpha$ Eu$\chi\alpha\rho$i$\sigma\tau\eta\rho$ioν), Ant. N. Sakkoulas publishers, Athens, 155 - 170..

Grundmengen:

– U (Menge von Wortäußerungen)
– L (Menge von geschriebenen Wörtern)
– PA (Menge von Phrasenarten)
– H (Menge von Hilfssymbolen)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)

Definition:

– X^* ist die Menge der Listen, deren Elemente aus der Menge X stammen

Relationen:

– gS (eine Menge von gesprochenen Sätzen)
– Σ (eine Menge von Startsymbolen)
– $PhrR$ (eine Menge von Phrasenregeln)
– TrR (eine Menge von Transformationsregeln)
– mpR (eine Menge von morphophonetischen Regeln)

Konstante:

– *Sent*, *Quest*, *Passiv*

Definition:

– $B = U \cup L \cup PA \cup H$ (Menge der Äußerungen)
– $PR = PhrR \cup TrR \cup mpR$ (Menge der Produktionsregeln)
– $p \in PS(B, \Sigma, PR)$ (siehe TA12)
– $end(p)$ (siehe TA12)

Typisierungen:

Θ_1 $Sent \in PA$ (deklarative Form)
Θ_2 $Quest \in PA$ (Frageform)
Θ_3 $Passiv \in PA$ (passive Form)
Θ_4 $\Sigma \in \wp(PA)$
Θ_5 $gs \in \wp(U^*)$
Θ_6 $PhrR \in \wp((L \cup PA \cup H)^* \times (L \cup PA \cup H)^*)$
Θ_7 $TrR \in \wp((L \cup PA \cup H)^*) \times (L \cup PA \cup H)^*)$
Θ_8 $mpR \in \wp((L \cup PA \cup H)^*) \times (L \cup PA \cup H)^*)$

Hypothesen:

H_1 $U \neq \emptyset, PA \neq \emptyset, gS \neq \emptyset, PhrR \neq \emptyset, TrR \neq \emptyset, mpR \neq \emptyset$ und

PA ist endlich

H_2 U, PA, H sind paarweise disjunkt und L, PA, H sind paarweise disjunkt

H_3 $\forall u \in U\ \exists pa \in PA(\langle\langle pa\rangle, \langle u\rangle\rangle \in PhrR)$

H_4 $\forall s \in gS\ \exists k \in \mathbb{N}\ \exists u_1, ..., u_k \in U(s = \langle u_1, ..., u_k\rangle)$

H_5 $\exists m \in \mathbb{N}\ \exists u_1, ..., u_m \in U(\langle u_1, ..., u_m\rangle \notin gS)$

H_6 $\Sigma \subseteq \{Sent, Qest, Passiv\}$ und $Sent \in \Sigma$

H_7 $\forall \sigma \in \Sigma \exists m \in \mathbb{N}\ \exists x_1, ..., x_m \in PA(\langle\langle\sigma\rangle, \langle x_1, ..., x_m\rangle\rangle \in PhrR)$

H_8 $\forall\langle v, h\rangle \in PhrR\ \exists w \in PA(v = \langle w\rangle)$

H_9 $\forall\langle u, v\rangle \in PhrR\ \exists m, n \in \mathbb{N}\ \exists x_1, ..., x_m, y_1, .., y_n \forall i, j \in \{1, ..., n\}$
$(u = \langle x_1, ..., x_m\rangle \wedge v = \langle y_1, ..., y_n\rangle \wedge y_i \neq y_j)$

H_{10} $\forall\langle\langle x_1, ..., x_m\rangle, \langle y_1, ..., y_n\rangle\rangle \in TrR\ (\{y_1, ..., y_n\} = \{x_1, ..., x_m\})$

H_{11} $\forall\langle u, v\rangle \in TrR\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall x_1, ..., x_m \forall i, j \in \{1, ..., m\}$
$(u = \langle x_1, ..., x_m\rangle \wedge 2 \leq m \wedge x_i \neq x_j)$

H_{12} $\forall u \in U\ \exists v(\langle v, \langle u\rangle\rangle \in mpR)$

H_{13} $\forall s \in gS\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists p\ \exists s^*\ \exists u_1, ..., u_n$
$(\ p \in PS(B, \Sigma, PR) \wedge s^* = end(p)\ \wedge\ s = \langle u_1, ..., u_n\rangle = s^*\ )$
(siehe TA12)

Modelle:

x ist ein Modell einer linguistischen Struktur gdw es Mengen $U, L, PA, H, gS, \Sigma,$ $PhrR, TrR, mpR$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle U, L, PA, H, \mathbb{N}, gS, \Sigma, PhrR, TrR, mpR\rangle$$

und die Relationen und Konstanten haben die Typen Θ_1,...,Θ_8 und die Hypothesen $H_1(U, L, PA, H, \mathbb{N}, gS, \Sigma, PhrR, TrR, mpR)$, ...,
$H_{13}(U, L, PA, H, \mathbb{N}, gS, \Sigma, PhrR, TrR, mpR)$ gelten in x.

I(TLS) ist die Menge der intendierten Systeme

Beispiele:
– Bildungsprozesse von Sätzen in jeweils einer natürlichen Sprache

Messmodelle

TD1 Extensive Strukturen, EXT

Grundmenge:

– D (Menge von ausgedehnten, materiellen Objekten)

Hilfsmenge:

– $\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen

Relationen:

– $\preceq$ (Vergleichsrelation)
– $\circ$ (Konkatenationsfunktion)

Typisierungen:

Θ_1 $\preceq \in \wp(D \times D)$
Θ_2 $\circ \in \mathcal{FUN}(D \times D : D)$

Definitionen:

$a \prec b$ gdw $a \preceq b \wedge \neg b \preceq a$
$a \sim b$ gdw $a \preceq b \wedge b \preceq a$
$\circ(a, b)$ wird so geschrieben: $a \circ b$ oder $(a \circ b)$
na ist die Konkatenation von n Objekten des Typs a: $na = a \circ ... \circ a$

Hypothesen:

$H1$ $\circ$ ist eine Funktion
$H2$ $\forall a \in D(\neg(a \circ a) = a)$
$H3$ $\forall\ a, b, c \in D(a \preceq b \wedge b \preceq c \rightarrow a \preceq c)$
$H4$ $\forall\ a, b \in D(a \preceq b \vee b \preceq a)$
$H5$ $\forall\ a, b, c \in D(a \circ (b \circ c) \sim (a \circ b) \circ c)$
$H6$ $\forall\ a, b \in D(a \circ b \sim b \circ a)$
$H7$ $\forall\ a, b, c \in D(a \preceq b \leftrightarrow (a \circ c \preceq b \circ c))$
$H8$ $\forall\ a, b, c, d \in D \exists n \in \mathbb{N}\ (a \prec b \rightarrow \neg(na \circ c \preceq nb \circ d))$

Modelle:

x ist ein Modell der extensiven Strukturen gdw es Mengen $D, \preceq, \circ$ gibt, so dass gilt:

$$x = \langle D, \mathbb{N},\ \preceq, \circ \rangle$$

und die Relationen $\preceq, \circ$ haben die Typen Θ_1, Θ_2
und die Hypothesen $H_1(D, \mathbb{N}, \preceq, \circ)$,...., $H_8(D, \mathbb{N}, \preceq, \circ)$ gelten in x.

I(EXT) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Messprozesse, bei denen Objekte aneinandergelegt werden.

TD2 Gewichtsmessmodell mit Sprungfeder, GMS

Rekonstruktionen:
Balzer, W., Moulines, C. U., Sneed, J. D. (1987): *An Architectonic for Science* IV 4, Dordrecht, Reidel

Grundmengen:

– P (Menge von materiellen Objekten)
– T (Menge der Zeitpunkte)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen)
– $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)

Relationen:

– s Ortsfunktion
– m Massefunktion
– f Kraftfunktion

Konstanten:

– k Federkonstante
– p_1, p_2, p_3 die einzelnen materiellen Objekte

Definition:

– $\mathbb{R}^3$ (die Menge der 3-dimensionalen, reellen Vektoren)

Typisierungen:

Θ_1 $s \in \mathcal{FUN}(P \times T : \mathbb{R}^3)$
Θ_2 $m \in \mathcal{FUN}(P : \mathbb{R}^3)$
Θ_3 $f \in \mathcal{FUN}(P \times T \times \mathbb{N} : \mathbb{R}^3)$
Θ_4 $k \in \mathbb{R}$
Θ_5 $p_1 \in P,\ p_2 \in P,\ p_3 \in P$

Definitionen:

$\dot{s}(p,t)$ bedeutet 'die erste Ableitung der Funktion s im zweiten Argument t'
$\ddot{s}(p,t)$ bedeutet 'die zweite Ableitung der Funktion s im zweiten Argument t'
$*$ ist die skalare Multiplikation, d.h. wenn u eine reelle Zahl und z ein 3-dimensionaler, reeller Vektor ist, dann ist $u * z$ die skalare Multiplikation von u und z

Hypothesen:

H_1 $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq p_1$
H_2 $T \subseteq \mathbb{R}$ und T ist ein offenes Intervall
H_3 $\forall p \in P(m(p) > 0)$
H_4 $\forall i, j \in \{1,2,3\} \forall t, t' \in T(s(p_i,t) - s(p_j,t) = s(p_i,t') - s(p_j,t'))$
H_5 $\exists \delta \in \mathbb{R}^3\ \forall t \in T\ (\ \ddot{s}(p_1,t) = \delta)$
H_6 $\forall t \in T \forall i \in \mathbb{N}\ (\ f(p_1,t,i) = f(p_3,t,i) = 0\ )$

H_7 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ($f(p_2, t, 1) = -k * (\dot{s}(p_2, t) - \dot{s}(p_3, t)))$
H_8 $\exists \beta \in \mathbb{R}\ \forall t \in T$ ($f(p_2, t, 1) = \beta * (\dot{s}(p_3, \alpha) - \dot{s}(p_1, t)))$
H_9 $\forall t \in T(f(p_2, t, 1) = -f(p_2, t, 2))$
H_{10} $\forall i \in \mathbb{N}\ \forall t \in T(i > 2 \rightarrow f(p_2, t, i) = 0)$

Messmodelle:

x ist ein Gewichtsmessmodell mit Sprungfeder gdw es Mengen $P, T, \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^3, s, m, f$ und Konstanten k, p_1, p_2, p_3 gibt, so dass gilt:

$$x = \langle P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f, k, p_1, p_2, p_3 \rangle$$

und die Relationen $s, m, f, k, p_1, p_2, p_3$ haben die Typen $\Theta_1, \ldots, \Theta_5$ und die Hypothesen $H_1(P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f, k, p_1, p_2, p_3)$ und ... und $H_{10}(P, T, \mathbb{N}, \mathbb{R}^3, s, m, f, k, p_1, p_2, p_3)$ gelten in x.

I(GMS) ist die Menge der intendierten Systeme.

Beispiele:
– Systeme, bei denen Objekt p_1 die Erde, p_3 ein fest aufgehängtes Objekt ist und k die Konstante der Sprungfeder.

TD3 Messmodell für eine Masse durch Stoß einer zweiten Masse, MMS

Balzer, W. & Mühlhölzer, F. 1982: Klassische Stoßmechanik, *Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie*13, 22 -39.

Grundmengen:

– P (Menge von materiellen Objekten)
– T (Menge von Zeitpunkten)

Hilfsmengen:

– $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)

Relationen:

– v Geschwindigkeitsfunktion
– m Massefunktion
– Konstanten: p, p' (p ist die Einheitsmasse)

Definition:

– $\mathbb{R}^3$ (die Menge der 3-dimensionalen, reellen Vektoren)

Typisierungen:

Θ_1 $v \in \mathcal{FUN}(P \times T : \mathbb{R}^3)$
Θ_2 $m \in \mathcal{FUN}(P : \mathbb{R})$
Θ_3 $p \in P$
Θ_4 $p' \in P$

Definition:

Vektoren v, v' sind collinear gdw es $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \neq 0 \wedge v = \alpha * v'$)

Hypothesen:

H_1 $T \subset \mathbb{R} \wedge T = \{-1, 1\}$
H_2 $\forall p \in P(m(p) > 0)$
H_3 $P = \{p, p'\}$
H_4 $\forall t \in T(v(p,t)$ und $v(p',t)$ sind collinear)
H_5 $v(p,t) \neq v(p,t')$
H_6 $m(p) \cdot \mid v(p,t) - v(p,t') \mid = m(p') \cdot \mid v(p',t) - v(p',t') \mid$
H_7 $m(p) = 1$

Modelle:

x ist ein Messmodell für eine Masse durch Stoß einer zweiten Masse gdw es P, T, v, m, p, p' gibt, so dass gilt:

$$x = \langle P, T, \mathbb{R}^3, v, m, p, p' \rangle$$

und die Relationen P, T, v, m, p, p' haben die Typen Θ_1, ..., Θ_4
und die Hypothesen $H_1(P, T, \mathbb{R}^3, v, m, p, p')$, ..., $H_7(P, T, \mathbb{R}^3, v, m, p, p')$ gelten in x.

I(MMS) ist die Menge der intendierten Messmodelle für eine Masse durch Stoß einer zweiten Masse.

Beispiele:
– Stoßexperimente in physikalischen Labors
– Stöße in Billiardtischen, mit genau zwei Kugeln.

Theorem: Jedes Messmodell für eine Masse durch Stoß einer zweiten Masse ist ein Modell der klassischen Partikelmechanik.